

# GIS 中 3 维空间圆曲线的不确定性模型

张国芹<sup>1,2</sup>, 朱长青<sup>1,3</sup>, 周 滨<sup>3</sup>, 柳林涛<sup>1</sup>, 刘海砚<sup>3</sup>

(1. 中国科学院 测量与地球物理研究所, 湖北 武汉 430077; 2. 信息工程大学 理学院, 河南 郑州 450052;  
3. 信息工程大学 测绘学院, 河南 郑州 450052)

## Uncertainty Model of Spatial Circular Curve Features in GIS

ZHANG Guo-qin<sup>1,2</sup>, ZHU Chang-qing<sup>1,3</sup>, Zhou Bin<sup>3</sup>, LIU Lin-tao<sup>1</sup>, LIU Hai-yan<sup>3</sup>

(1. Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077, China; 2. Institute of Science, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China; 3. Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China)

**Abstract:** With the development of three-dimension geographical information science, the uncertainty of three-dimension spatial elements has become more and more important. Based on the uncertainty and statistic theory, an uncertainty model for three-dimension circular curve in GIS is developed. Firstly, the differential formula for any point on the three-dimension circular curve is derived. Then, the variance for any point on the three-dimension circular curve is given. Finally, the model for three-dimension circular curve is obtained. With a case study, it is shown that the error band of three-dimension circular curve is with the shape of "larger extreme points and less middle".

**Key words:** GIS; spatial circular curve; position uncertainty; error band

**摘 要:** 随着 GIS 向 3 维领域的不断发展, 对 3 维空间元素的不确定性研究日趋重要。基于不确定性理论及概率统计理论, 研究 GIS 中 3 维空间圆曲线的不确定性模型。首先建立 3 维空间圆曲线上任意点坐标的微分关系式, 然后得到圆曲线上任意点坐标的方差, 进而获得 3 维空间圆曲线的模型。实际算例表明, 3 维空间圆曲线误差分布呈现出“两端大, 中间小”的趋势。

**关键词:** GIS; 空间圆曲线; 位置不确定性; 误差带

## 1 引 言

GIS 空间数据质量的好坏直接影响到地理信息系统的经济和社会效益, 其中位置精度的研究占有十分重要的地位。点、线、面是确立一切空间实体的基本元素, 因此, 分析 GIS 中位置不确定性问题, 必须首先来研究这些基本要素的位置不

确定性和精度指标。其中线元不仅是面域不确定性的基础, 其本身也是 GIS 叠置分析、缓冲区分析等的基本元素。目前, 对于 2 维平面上的线元不确定性模型已有许多研究<sup>[1~6]</sup>。例如, 文献 [3] 对 2 维平面上的圆曲线不确定性进行了研究, 应用圆曲线上任意点坐标的协方差来描述圆曲线的不确定性模型。但是, 对 3 维空间中元素的不

收稿日期: 2004-05-11; 修回日期: 2005-04-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40401052, 40174006); 中国科学院百人计划资助项目(2004)

作者简介: 张国芹(1973-), 女, 河北新乐人, 硕士, 讲师, 主要从事空间数据不确定性与应用数学研究。

确定性的研究相对较少。随着3维GIS应用的不断深入,对3维空间元素的不确定性研究日趋重要。文献[2]将研究2维平面直线不确定性的思想引入到3维空间,建立了3维空间直线的不确定性模型。进一步地,本文对3维空间圆曲线的不确定性模型进行了研究。

如图1,设 $A_1, A_2, A_3$ 为3维空间圆曲线上的3点,若有观测距离 $s_{1i}$ ,则可通过 $A_1$ 和 $s_{1i}$ 确定 $i$ 点在圆曲线上的位置。同样,若有观测距离 $s_{3i}$ ,则可通过 $A_3$ 和 $s_{3i}$ 确定 $i$ 点在圆曲线上的位置。一般同时有观测距离 $s_{1i}$ 和 $s_{3i}$ ,故以 $1/s_{1i}$ 和 $1/s_{3i}$ 作为权取加权平均值,进而由加权平均值方差得到圆曲线在该点法平面上的误差椭圆,并由误差椭圆族来描述3维空间圆曲线的模型。最后用实际数据对提出的模型进行了检验。

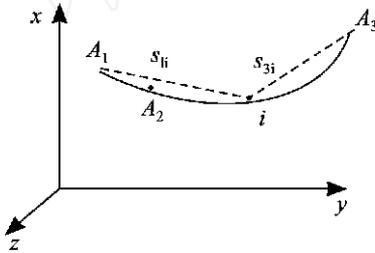


图1 3维GIS中的空间圆曲线上任意一点

Fig.1 An arbitrary point on three-dimension circular curve

## 2 任意点坐标的微分关系式和方差

### 2.1 任意点坐标的微分关系式

过点 $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3)$ 的空间圆曲线 $A_1A_2A_3$ 可由过该3点的平面截过该3点的球面得到,且设过3点的平面截过该3点的球面得到圆为球面上的大圆,即圆曲线在球面的大圆上,此时球心在过3点的平面上。因此空间圆曲线 $A_1A_2A_3$ 的方程可由式(1)、(2)确定

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad (1)$$

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (2)$$

其中,式(1)是过点 $A_1, A_2, A_3$ 的一个球面方程, $R$ 为球面半径, $(x_0, y_0, z_0)$ 为球心坐标;式(2)是由 $A_1, A_2, A_3$ 3点确定的平面方程。其中,参数 $a, b, c, d$ 由3点坐标确定,分别为

$$\left. \begin{aligned} a &= (y_1 - y_2)(z_1 - z_3) - (y_1 - y_3)(z_1 - z_2) \\ b &= (x_1 - x_3)(z_1 - z_2) - (x_1 - x_2)(z_1 - z_3) \\ c &= (y_1 - y_3)(x_1 - x_2) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2) \\ d &= -(ax_1 + by_1 + cz_1) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

如上所述,空间圆曲线 $A_1A_2A_3$ 的数学表达式为式(1)、(2),所以圆曲线上的点 $A_1, A_2, A_3$ 和任意一点 $i$ 坐标均满足式(1)、(2);且球心在平面上,故球心坐标满足式(2)。将 $A_1, A_2, A_3$ 坐标分别代入式(1),并将球心坐标 $(x_0, y_0, z_0)$ 代入式(2),得

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 &= R^2 \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 &= R^2 \\ (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 + (z_3 - z_0)^2 &= R^2 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由式(4)可惟一解得 $x_0, y_0, z_0, R$ 的值如下:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & x_{12} & 2 & y_{12} & 2 & z_{12} \\ 2 & x_{13} & 2 & y_{13} & 2 & z_{13} \\ a & & b & & c & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ -d \end{pmatrix}$$

$$R = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

其中,记

$$x_{ij} = x_j - x_i$$

且

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + z_2^2 - z_1^2 \\ d_2 &= x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 + z_3^2 - z_1^2 \end{aligned} \right\}$$

于是, $x_0, y_0, z_0, R$ 也可惟一确定。

将式(4)微分,得

$$x_{01}(dx_1 - dx_0) + y_{01}(dy_1 - dy_0) + z_{01}(dz_1 - dz_0) = RdR \quad (5)$$

$$x_{02}(dx_2 - dx_0) + y_{02}(dy_2 - dy_0) + z_{02}(dz_2 - dz_0) = RdR \quad (6)$$

$$x_{03}(dx_3 - dx_0) + y_{03}(dy_3 - dy_0) + z_{03}(dz_3 - dz_0) = RdR \quad (7)$$

$$adx_0 + bdy_0 + cdz_0 + x_0da + y_0db + z_0dc + dd = 0 \quad (8)$$

将式(3)微分,得

$$\left. \begin{aligned} da &= -z_{23}dy_1 + z_{13}dy_2 - z_{12}dy_3 + \\ &\quad y_{23}dz_1 - y_{13}dz_2 + y_{12}dz_3 \\ db &= z_{23}dx_1 - z_{13}dx_2 + z_{12}dx_3 - \\ &\quad x_{23}dz_1 + x_{13}dz_2 - x_{12}dz_3 \\ dc &= -y_{23}dx_1 + y_{13}dx_2 - y_{12}dx_3 + \\ &\quad x_{23}dy_1 - x_{13}dy_2 + x_{12}dy_3 \\ dd &= -(adx_1 + bdy_1 + cdz_1 + x_1da + \\ &\quad y_1db + z_1dc) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8),并由式(5)、(6)、(7)、(8)解得

$$\begin{pmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{pmatrix} = A d \quad (10)$$

其中,  $A = \begin{pmatrix} x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_{13} & y_{13} & z_{13} \\ a & b & c \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -x_{01} & -y_{01} & -z_{01} & x_{02} & y_{02} & z_{02} & 0 & 0 & 0 \\ -x_{01} & -y_{01} & -z_{01} & 0 & 0 & 0 & x_{03} & y_{03} & z_{03} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix}$

$$d = (dx_1 \quad dy_1 \quad dz_1 \quad dx_2 \quad dy_2 \quad dz_2 \quad dx_3 \quad dy_3 \quad dz_3)^T$$

$$\begin{aligned} c_1 &= a + y_{01}z_{23} - z_{01}y_{23} \\ c_2 &= b - x_{01}z_{23} + z_{01}x_{23} \\ c_3 &= c + x_{01}y_{23} - y_{01}x_{23} \\ c_4 &= -y_{01}z_{13} + z_{01}y_{13} \\ c_5 &= x_{01}z_{13} - z_{01}x_{13} \\ c_6 &= -x_{01}y_{13} + y_{01}x_{13} \\ c_7 &= y_{01}z_{12} - z_{01}y_{12} \\ c_8 &= -x_{01}z_{12} + z_{01}x_{12} \\ c_9 &= x_{01}y_{12} - y_{01}x_{12} \end{aligned}$$

设  $i$  是 3 维空间圆曲线  $A_1A_2A_3$  上任意一点,其坐标为  $(x_i, y_i, z_i)$ 。将  $i$  点坐标代入式(1)、(2),并微分,得

$$x_{0i}(dx_i - dx_0) + y_{0i}(dy_i - dy_0) + z_{0i}(dz_i - dz_0) = R dR \quad (11)$$

$$adx_i + bdy_i + cdz_i + dd + x_ida + y_idb + z_idc = 0 \quad (12)$$

将式(5)、(10)代入式(11),得

$$x_{0i}dx_i + y_{0i}dy_i + z_{0i}dz_i = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9) d \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} b_1 &= x_{0i} + x_{1i}a_{11} + y_{1i}a_{21} + z_{1i}a_{31} \\ b_2 &= y_{0i} + x_{1i}a_{12} + y_{1i}a_{22} + z_{1i}a_{32} \\ b_3 &= z_{0i} + x_{1i}a_{13} + y_{1i}a_{23} + z_{1i}a_{33} \\ b_j &= x_{1i}a_{1j} + y_{1i}a_{2j} + z_{1i}a_{3j} \quad (j=4, 5, \dots, 9) \end{aligned}$$

将式(9)代入式(12),得

$$adx_i + bdy_i + cdz_i = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9) d \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= a - y_{1i}z_{23} + z_{1i}y_{23} \\ a_2 &= b + x_{1i}z_{23} - z_{1i}x_{23} \\ a_3 &= c - x_{1i}y_{23} + y_{1i}x_{23} \\ a_4 &= y_{1i}z_{13} - z_{1i}y_{13} \\ a_5 &= -x_{1i}z_{13} + z_{1i}x_{13} \\ a_6 &= x_{1i}y_{13} - y_{1i}x_{13} \\ a_7 &= -y_{1i}z_{12} + z_{1i}y_{12} \\ a_8 &= x_{1i}z_{12} - z_{1i}x_{12} \\ a_9 &= -x_{1i}y_{12} + y_{1i}x_{12} \end{aligned}$$

相对于空间圆曲线  $A_1A_2A_3$  的端点  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,对应于观测距离  $s_{1i}, s_{1i}$  满足

$$(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2 + (z_i - z_1)^2 = s_{1i}^2$$

将上式微分,得

$$x_{1i}(dx_i - dx_1) + y_{1i}(dy_i - dy_1) + z_{1i}(dz_i - dz_1) = s_{1i}ds_{1i} \quad (15)$$

由式(13)、(14)、(15)解得微分关系式

$$(dx_i \quad dy_i \quad dz_i)^T = B d \quad (16)$$

其中

$$d = (dx_1 \quad dy_1 \quad dz_1 \quad dx_2 \quad dy_2 \quad dz_2 \quad dx_3 \quad dy_3 \quad dz_3 \quad ds_{1i} \quad ds_{2i})^T$$

$$B = \begin{pmatrix} x_{0i} & y_{0i} & z_{0i} \\ a & b & c \\ x_{1i} & y_{1i} & z_{1i} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & 0 & 0 \\ x_{1i} & y_{1i} & z_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{1i} & 0 \end{pmatrix}$$

而由观测距离  $s_{3i}$  的微分关系式和式(13)、(14)同理可导出如下的微分关系式

$$C = \begin{pmatrix} x_{0i} & y_{0i} & z_{0i} \\ a & b & c \\ x_{3i} & y_{3i} & z_{3i} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{3i} & y_{3i} & z_{3i} & 0 & s_{3i} \end{pmatrix}$$

于是,得到了以点  $A_1, A_3$  为端点的空间圆曲线  $A_1A_2A_3$  上任意点  $i$  坐标的微分关系式,它们分别由公式(16)和(17)表示。

### 2.2 任意点 $i$ 坐标的方差

为求以点  $A_1, A_3$  为端点的空间圆曲线上任意一点  $i$  坐标的方差,首先将由式(16)、(17)得到的微分关系式取加权平均值,其权为  $1/s_{1i}$  和  $1/s_{3i}$ 。于是,可得

$$\begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{pmatrix} = (1 - r_1) \begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{pmatrix} = (B - r_1 B + C) d \tag{18}$$

式中,  $r_1 = s_{1i}/s_{13}$ 。根据协方差传播规律,可以得到任意点  $i$  坐标的方差

$$D_i = \begin{pmatrix} 2 & & \\ x_i & x_i y_i & x_i z_i \\ x_i y_i & 2 & y_i z_i \\ x_i z_i & y_i z_i & 2 & z_i \end{pmatrix} = (B - r_1 B + r_1 C) D (B - r_1 B + r_1 C)^T \tag{19}$$

式中,  $D$  表示 的方差-协方差阵。

## 3 3 维空间圆曲线的 模型

### 3.1 两个 3 维坐标系的旋转矩阵

为了得到空间圆曲线上任意一点  $i(x_i, y_i, z_i)$  在该点法平面上的误差椭圆,首先建立局部 3 维坐标系  $o - x_i y_i z_i$ , 该坐标系的  $ox_i$  轴平行于圆曲线在  $i$  点处的切线,  $y_i oz_i$  平面平行于圆曲线在  $i$  点处的法平面。为此,先将  $xoy$  面绕  $oz$  轴旋转  $i_z$  成为  $x_i^0 o y_i^0$ , 使得  $ox_i^0$  与  $oR_i$  在  $xoy$  面上的投影方向一致;再将  $x_i^0 o z_i^0$  平面绕  $oy_i^0$  旋转  $i_y$  成为  $x_i oz_i$  面,使得  $ox_i$  轴平行于圆曲线在  $i$  点处的切线,切线向量为  $\bar{n} = \{c y_{0i} - b z_{0i}, a z_{0i} - c x_{0i}, b x_{0i} - a y_{0i}\}$ , 并设该向量所对应的

$$(dx_i \quad dy_i \quad dz_i)^T = Cd \tag{17}$$

其中,

3 维空间中的点为

$$R_i(x_{R_i}, y_{R_i}, z_{R_i}) = R_i(c y_{0i} - b z_{0i}, a z_{0i} - c x_{0i}, b x_{0i} - a y_{0i})$$

由于  $y_i oz_i$  平面垂直于  $ox_i$ , 因此不必再旋转。旋转矩阵为

$$R_i = R\left(\begin{matrix} i \\ x \end{matrix}\right) R\left(\begin{matrix} i \\ y \end{matrix}\right) R\left(\begin{matrix} i \\ z \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos i_y \cos i_z & \cos i_y \sin i_z & -\sin i_y \\ -\sin i_z & \cos i_z & 0 \\ \sin i_y \cos i_z & \sin i_y \sin i_z & \cos i_y \end{pmatrix} \tag{20}$$

其中,  $i_z = \arctan(y_{R_i}/x_{R_i})$ ,  $i_y = -\arctan(z_{R_i}/(x_{R_i}^2 + y_{R_i}^2))$ 。旋转后圆曲线上任意一点  $i$  的坐标为

$$(x_i \quad y_i \quad z_i)^T = R_i(x_i \quad y_i \quad z_i)^T \tag{21}$$

### 3.2 3 维空间圆曲线的 模型

3 维空间圆曲线  $A_1A_2A_3$  在任意点  $i$  处法平面上的误差椭圆,也就是  $i$  点在  $o - x_i y_i z_i$  坐标系中  $y_i oz_i$  平面上的误差椭圆。为此,应求  $i$  点在  $o - x_i y_i z_i$  坐标系中的方差-协方差阵。据协方差传播规律,由式(21)可得

$$D_i = R_i D_i R_i^T = \begin{pmatrix} 2 & & \\ x_i & x_i y_i & x_i z_i \\ x_i y_i & 2 & y_i z_i \\ x_i z_i & y_i z_i & 2 & z_i \end{pmatrix} \tag{22}$$

其中,  $D_i, R_i$  分别由式(19)、(20)表示。

由此,3 维空间圆曲线上任意点  $i(x_i, y_i, z_i)$  在该点法平面上的误差椭圆参数即椭圆的长、短半轴  $E_i, F_i$  和主轴方向  $i$  的计算公式为<sup>[7]</sup>

$$\left. \begin{aligned} E_i^2 &= ( \frac{2}{y_i} + \frac{2}{z_i} + K ) / 2 \\ F_i^2 &= ( \frac{2}{y_i} + \frac{2}{z_i} - K ) / 2 \\ \tan 2 i &= 2 y_i z_i / ( \frac{2}{y_i} - \frac{2}{z_i} ) \end{aligned} \right\}$$

式中,  $K = \sqrt{( \frac{2}{y_i} - \frac{2}{z_i} )^2 + 4 \frac{2}{y_i z_i}}$ , 而  $i$  点处法平

面上的误差椭圆的面积为  $S_i = E_i F_i$ 。

此外，通过圆曲线端点  $A_1, A_3$  在  $o - x_i y_i z_i$  坐标系中的方差-协方差阵  $D_{A_1}, D_{A_3}$ ，可求得它们的误差椭球参数（包括误差椭球的 3 个主轴，以及它们的方向余弦）。根据所求出的 3 维空间圆曲线上各点在  $y o z$  平面上的误差椭圆所构成的误差椭圆族，以及圆曲线两个端点的部分空间误差椭球，形成了以 3 维空间圆曲线真值为轴心的不确定性域，称之为空间圆曲线的“带”。

### 4 算例分析

下面，给出 3 维空间圆曲线的“带”的算例。

表 1 原始数据表

Tab.1 The original data

点名	X/cm	Y/cm	Z/cm	$\frac{2}{x}/\text{cm}^2$	$\frac{2}{y}/\text{cm}^2$	$\frac{xy}{\text{cm}^2}$	$\frac{xz}{\text{cm}^2}$	$\frac{yz}{\text{cm}^2}$	$\frac{z^2}{\text{cm}^2}$
A <sub>1</sub>	500.0	500.00	100.00	3.136 53	1.303 11	0.219 42	0.114 23	0.114 68	0.157 91
A <sub>2</sub>	505.0	505.00	110.00	3.136 53	1.303 11	0.219 42	0.114 23	0.114 68	0.157 91
A <sub>3</sub>	510.0	515.00	105.00	3.136 53	1.303 11	0.219 42	0.114 23	0.114 68	0.157 91

表 2 空间圆曲线上的点在该点法平面上的误差椭圆参数

Tab.2 The error ellipsoid parameters on the space circular curve at the point of normal plane

$r_1$	$\frac{2}{y_i}/\text{cm}^2$	$\frac{2}{z_i}/\text{cm}^2$	$\frac{y_i z_i}{\text{cm}^2}$	E/cm	F/cm	EF/cm <sup>2</sup>	$i/(\text{°})$
0.10	1.146 9	1.244 4	0.407 5	1.267 3	0.886 1	1.123 0	- 83-10-26
0.30	1.052 4	0.371 8	0.162 9	1.043 7	0.578 6	0.603 9	25-35-3
0.50	0.813 4	0.199 1	0.041 6	0.903 4	0.443 0	0.400 3	7-43-3
0.70	1.002 3	0.284 1	- 0.074 3	1.004 9	0.525 9	0.528 5	- 11-41-17
0.90	1.703 1	0.725 4	- 0.261 3	1.329 9	0.812 4	1.080 4	- 28-7-35

表 3 端点  $A_1, A_3$  空间误差椭球主轴及方向余弦

Tab.3 The main axle of error ellipsoid and direction cosine at end points  $A_1, A_3$  / cm

$i$	$L_i$	$M_i$	$N_i$
1.473 8	0.576 8	0.813 0	- 0.079 6
0.986 1	- 0.816 3	0.576 8	- 0.032 7
0.137 7	- 0.032 7	0.120 3	0.992 2

图 2 显示了上述算例得到的 3 维空间圆曲线  $A_1, A_2, A_3$  不确定性的误差分布的可视化模型。

从表 2 的结果和图 2 的 3 维空间圆曲线不确定性的“模型”可视化可以看出，误差椭圆的短轴和长轴的乘积（也就是误差椭圆的面积）是“两端大，中间小”。空间圆曲线误差分布仍然呈现了“两端大，中间小”的趋势。从而，这种模型也扩展了 2 维平面圆曲线不确定性模型。

表 1 列出了 3 维空间圆曲线上点  $A_1, A_2, A_3$  的 3 维坐标及其方差-协方差矩阵，设  $D_{A_1 A_2} = 0, D_{A_1 A_3} = 0, D_{A_2 A_3} = 0$ 。表 2 根据本文所提出的模型计算出了 3 维空间圆曲线上  $r_1 = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$  处各点在该点法平面上的误差椭圆参数，其中  $r_1$  是式(18)表示的 3 维空间圆曲线上点  $i$  的位置的参数， $r_1 = s_{1i}/s_{13}$ 。表 3 列出了由模型计算出的端点处误差椭球参数。

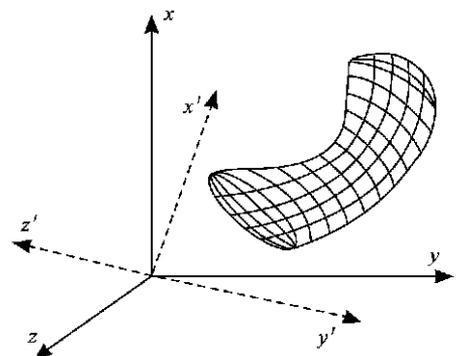


图 2 3 维空间圆曲线不确定性的“模型”

Fig.2 model of three-dimension circular curve

### 5 结 论

本文基于不确定性理论，建立了 3 维空间圆

曲线不确定性模型。该模型根据所求的 3 维空间圆曲线上各点在该点法平面上的误差椭圆所构成的误差椭圆族,以及圆曲线两个端点的部分空间误差椭圆,形成了以 3 维空间圆曲线真值为轴心的不确定性域,即空间圆曲线的带。由试验数据和可视化图形知,3 维空间圆曲线上各点的误差分布呈现出“两端大,中间小”的趋势,这种模型扩展了 2 维平面圆曲线不确定性模型。本文所得的模型不仅具有重要的理论价值,而且对于 GIS 特别是 3 维 GIS 分析与应用、虚拟现实、计算机图形学等都具有重要应用。

### 参考文献:

- [1] SHI Wen-zhong, *et al.* A Stochastic Process-based Model for Positional Error of Line Segments in GIS [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 2000, 14(1): 51-66.
- [2] LIU Da-jie, SHI Wen-zhong, *et al.* Accuracy Analysis and Quality Control of Spatial Data in GIS [M]. Shanghai: Shanghai Press of Scientific and Technical Literature, 1999. (刘大杰,史文中,等. GIS 空间数据的精度分析与质量控制[M]. 上海:上海科学技术文献出版社,1999.)
- [3] TONG Xiao-hua, SHI Wen-zhong, LIU Da-jie. Uncertainty Model of Circular Curve Features in GIS [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1999, 28(4). (童小华,史文中,刘大杰. GIS 中圆曲线的不确定性模型[J]. 测绘学报,1999,28(4).)
- [4] SHI Wen-zhong, LIU Wen-bao. A Stochastic Process Model for Handling Positional Uncertainty of Line Segments in GIS [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1998, 27(1). (史文中,刘文宝. GIS 中线元位置不确定性的随机过程模型[J]. 测绘学报,1998,27(1).)
- [5] LIU Wen-bao, DAI Hong-lei, *et al.* The Analytic Expression of Geometric Figure on Planar Lines Error Band [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1998, 27(3). (刘文宝,戴洪磊,等. 平面线位误差带几何形状的解析表达[J]. 测绘学报,1998,27(3).)
- [6] LIU Da-jie, HUA Hui. The More Discussion on the Modeling Uncertainty of Line Primitive in GIS [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1998, 27(1). (刘大杰,华慧. GIS 线要素不确定性模型的进一步探讨[J]. 测绘学报,1998,27(1).)
- [7] YU Zong-chou, LU Lin-cheng. The Base of Surveying Adjustment [M]. Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping, 1983. (於宗倬,鲁林成. 测量平差基础[M]. 北京:测绘出版社,1983.)

(责任编辑:雷秀丽)

## 启 事

为适应我国信息化建设需要,扩大作者学术交流渠道,本刊已加入《中国学术期刊(光盘版)》和“万方数据——数字化期刊群”,提供网络信息服务。作者著作权使用费与本刊稿酬一次性给付。如作者不同意将文章编入该数据库,请在来稿时声明,本刊将做适当处理。

本刊电子版网址为

<http://chxb.periodicals.net.cn/>

<http://chxb.chinajournal.net.cn/>

欢迎读者进入 chinainfo 系统免费查询检索本刊内容,欢迎各界朋友对本刊提出宝贵意见和建议并通过电子信箱向本刊投稿(E-mail:chxb@periodicals.net.cn;chxb@chinajournal.net.cn)。

《测绘学报》编辑部