

# GIS 中基本几何要素的置信区域问题研究

郭同德<sup>1</sup>, 王家耀<sup>2</sup>, 魏海平<sup>2</sup>

(1. 郑州大学 环境与水利学院, 河南 郑州 450002; 2. 信息工程大学 测绘学院, 河南 郑州 450052)

## A Study of Confidence Regions of the Fundamental Factors in GIS

GUO Tong-de<sup>1</sup>, WANG Jia-yao<sup>2</sup>, WEI Hai-ping<sup>2</sup>

(1. College of Environmental & Hydraulic Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China;  
2. Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China)

**Abstract:** Constructing confidence regions for points, lines and polygons is one of the most useful ways to express the uncertainties of these fundamental factors in GIS. The efficiency of a confidence region depends chiefly on its area and shape. Generally, a confidence region with small area is more effective than that with a large one on condition that they satisfy the same confidence level. With the view of applications, the analytic expressions of the regions should be as concise as possible. This paper aims at making a study of the confidence regions. Firstly, two interesting properties concerning the error ellipse are given and an elliptic confidence region of point is established. On the basis of this, the confidence regions of lines and polygons are established respectively. By using the probability theory, the relations between the regions established and their confidence levels are discussed analytically. Since the confidence regions presented in this paper only consist of lines and ellipses, the visualization of the confidence regions is quite convenient. Finally, several numerical examples are provided to show the usual procedure of visualization for these regions.

The areas of the confidence regions given in this paper are comparatively small and the analytic expressions of the regions are simple. The main conclusions provided in this paper can be used to control the data quality. Though only the planar factors are discussed, the methods used in this paper can also be used to the discussion of spatial factors.

**Key words:** error ellipse; confidence region; confidence level; visualization

**摘 要:** 以概率论为工具解析地研究了误差椭圆的 2 个重要性质, 在此基础上分别为点、线及多边形建立了由椭圆和线段组成的置信域, 并给出了所建置信域与其置信水平的关系。最后通过算例讨论了置信域的可视化表示问题。

**关键词:** 误差椭圆; 置信域; 置信水平; 可视化

## 1 引 言

点、线、多边形为 GIS 中最基本的几何要素, 无论是从理论角度还是从应用角度来看, 对其位置不确定性的研究都是极为重要的<sup>[1~3]</sup>。由于

置信域是围绕已知测量值建立的, 便于应用, 置信域问题的讨论又有其特殊意义。对这 3 类几何要素可建立各种各样的置信域, 但作为一种估计来讲, 在保证一定的置信水平的条件下, 置信域面积应尽可能地小。从置信域的可视化表示考虑, 所

建置置信域边界的解析表达应尽可能地简明。研究此类问题时,一般先给定一个区域,再证明该区域满足给定的置信水平。证明中往往要经过多次不等式放大,导致所建置置信域面积过大,结果过于保守。文献[1,2]分别为点建立了圆形及矩形置信域。文献[3]从线段的概率分布入手,借助 Cauchy-Schwarz 不等式,巧妙地建立了一个“哑铃”状的置信域,其面积约为等宽置信域面积的 81.16%。考虑到点、线、多边形之间的构成关系,作者认为点的置信域的建立是讨论问题的关键。本文从误差椭圆入手,给出点的椭圆形置信域,并为线段及多边形建立了由椭圆和线段组成的置信域。

## 2 预备定理

**定理 1:** 设  $(X, Y)$  服从  $N(\mu, \sigma_1^2; \nu, \sigma_2^2; \rho)$ , 误差椭圆为

$$D = \{ (x, y) | (x - \mu, y - \nu) B^{-1} (x - \mu, y - \nu)^T \leq R^2 \}$$

式中,  $B = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ ;  $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$ ;  $T$  表示转置。

过  $D$  的边界点  $P(x_0, y_0)$  作切线  $l$ ,  $l$  的两侧中不含  $D$  的一侧记为  $D_1$  (见图 1 中阴影部分), 则  $P\{(X, Y) \in D_1\} = 1 - F(R)$ , 这里  $F(R)$  为标准正态分布函数。

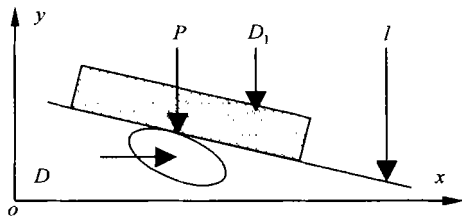


图 1 点域

Fig. 1 The region of points

**证明:** 不妨假定  $\mu = \nu = 0$ , 易求得切线方程为

$$\frac{y}{\sigma_2} \left( \frac{y_0}{\sigma_2} - \frac{x_0}{\sigma_1} \right) + \frac{x}{\sigma_1} \left( \frac{x_0}{\sigma_1} - \frac{y_0}{\sigma_2} \right) = (1 - \rho^2) R^2$$

所以

$$P\{(X, Y) \in D_1\} =$$

$$P\left\{ \frac{Y}{\sigma_2} \left( \frac{y_0}{\sigma_2} - \frac{x_0}{\sigma_1} \right) + \frac{X}{\sigma_1} \left( \frac{x_0}{\sigma_1} - \frac{y_0}{\sigma_2} \right) \geq (1 - \rho^2) R^2 \right\}$$

由  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(0, \sigma_1^2; 0, \sigma_2^2; \rho)$  知,  $\frac{Y}{\sigma_2}$ ,  $\frac{X}{\sigma_1}$  均服从标准正态分布  $N(0, 1)$ , 所以

$$E\left[ \frac{Y}{\sigma_2} \left( \frac{y_0}{\sigma_2} - \frac{x_0}{\sigma_1} \right) + \frac{X}{\sigma_1} \left( \frac{x_0}{\sigma_1} - \frac{y_0}{\sigma_2} \right) \right] = 0$$

$$D\left[ \frac{Y}{\sigma_2} \left( \frac{y_0}{\sigma_2} - \frac{x_0}{\sigma_1} \right) + \frac{X}{\sigma_1} \left( \frac{x_0}{\sigma_1} - \frac{y_0}{\sigma_2} \right) \right] =$$

$$\left( \frac{y_0}{\sigma_2} - \frac{x_0}{\sigma_1} \right)^2 + \left( \frac{x_0}{\sigma_1} - \frac{y_0}{\sigma_2} \right)^2 +$$

$$2 \left( \frac{y_0}{\sigma_2} - \frac{x_0}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_0}{\sigma_1} - \frac{y_0}{\sigma_2} \right) =$$

$$(1 - \rho^2) \left[ \left( \frac{y_0^2}{\sigma_2^2} + \frac{x_0^2}{\sigma_1^2} - \frac{2x_0y_0}{\sigma_1\sigma_2} \right) \right]$$

因  $P$  点在误差椭圆上, 所以

$$\frac{y_0^2}{\sigma_2^2} + \frac{x_0^2}{\sigma_1^2} - \frac{2x_0y_0}{\sigma_1\sigma_2} = (1 - \rho^2) R^2$$

从而

$$D\left[ \frac{Y}{\sigma_2} \left( \frac{y_0}{\sigma_2} - \frac{x_0}{\sigma_1} \right) + \frac{X}{\sigma_1} \left( \frac{x_0}{\sigma_1} - \frac{y_0}{\sigma_2} \right) \right] = (1 - \rho^2)^2 R^2$$

即  $\frac{Y}{\sigma_2} \left( \frac{y_0}{\sigma_2} - \frac{x_0}{\sigma_1} \right) + \frac{X}{\sigma_1} \left( \frac{x_0}{\sigma_1} - \frac{y_0}{\sigma_2} \right)$  服从  $N(0, (1 - \rho^2)^2 R^2)$ , 经过标准正态化, 容易得到

$$P\{(X, Y) \in D_1\} = 1 - F(R)$$

**定理 2:** 在误差椭圆  $D$  的边界点  $P_1, P_2$  作 2 条相平行的切线  $l_1, l_2$ , 2 切线所夹区域被  $D$  分为 2 部分, 记其中一部分为  $E$  (见图 2), 则

$$P\{(X, Y) \in D \cap E\} = F(R) - \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{R^2}{2}\right]$$

**证明:** 由文献[4]知

$$P\{(X, Y) \in D\} = 1 - \exp\left[-\frac{R^2}{2}\right]$$

由上述点域的对称性可得

$$2P\{(X, Y) \in D \cap E\} - P\{(X, Y) \in D\} = 1 - 2\{1 - F(R)\}$$

从而有

$$P\{(X, Y) \in D \cap E\} = F(R) - \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{R^2}{2}\right]$$

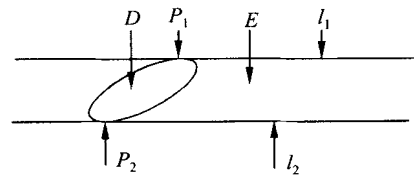


图 2 点域

Fig. 2 The region of points

## 3 点的置信域

点的置信域构造如下: 设点的真实位置为  $(\mu, \nu)$ , 测量值  $(X, Y)$  服从  $N(\mu, \sigma_1^2; \nu, \sigma_2^2; \rho)$ 。

以  $(X, Y)$  为中心作椭圆  $D$

$$\{(x, y) | (x - X, y - Y) B^{-1} (x - X, y - Y)^T \leq R^2\}$$

则

$$P\{(\mu, v) \in D_2\} = P\{(X, Y) \in D\} = 1 - \exp\{-\frac{R^2}{2}\}$$

若取  $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1.2$ , 置信水平为 0.97, 易算得上述椭圆形置信域的面积  $S = 26.38 R^2$ . 若以测量值  $(X, Y)$  为中心分别建立满足置信水平 0.97 的矩形、圆形置信域、则矩形域、圆形域的面积分别为  $28.92 R^2$  与  $31.66 R^2$ .

作为平面点  $(\mu, v)$  的一种估计, 置信域面积的大小从一个侧面反映了估计的精度, 在满足给定置信水平的条件下, 置信域面积应尽可能小一些。

### 4 线段的置信域

#### 4.1 均匀线段的置信域

均匀线段的置信域的构造如下: 设线段端点的真值及测量值分别为  $Q_i(\mu_i, v_i)$  和  $P_i(X_i, Y_i)$ ,  $(X_i, Y_i)$  服从  $N(\mu_i, \sigma_i^2; v_i, \tau_i^2)$  且  $(X_1, Y_1)$  与  $(X_2, Y_2)$  独立。分别以  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$  为中心作 2 个椭圆  $B_1, B_2$

$$\{(x, y) | (x - X_i, y - Y_i) B^{-1} (x - X_i, y - Y_i)^T \leq R^2\}$$

以  $B_1, B_2$  的 2 条平行的公切线连接  $B_1, B_2$ , 切线与椭圆所围区域记为  $B_3$  (见图 3), 则所构造线段置信域为

$$E = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

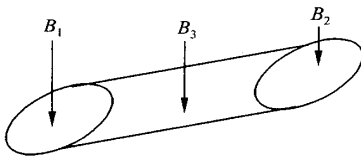


图 3 线段置信域

Fig. 3 The confidence region of a line

下面讨论区域  $E$  的置信水平  $P\{Q_1 Q_2 \subset E\}$ 。

如图 4 所示, 以  $Q_i$  为中心作误差椭圆  $C_i$ :

$$\{(x, y) | (x - \mu_i, y - v_i) B^{-1} (x - \mu_i, y - v_i)^T \leq R^2\}$$

比较 4 个椭圆的中心可知, 如果  $P_1 \in C_1 \cap E_1$  且  $P_2 \in C_2 \cap E_2$ , 则  $Q_1 Q_2 \subset E$ , 由定理 2 知

$$P\{Q_1 Q_2 \subset E\} = P\{P_1 \in C_1 \cap E_1, P_2 \in C_2 \cap E_2\} = P\{P_1 \in C_1 \cap E_1\} P\{P_2 \in C_2 \cap E_2\} =$$

$$\left\{ F(R) - \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{R^2}{2}\right] \right\}^2$$

易见, 若  $R$  满足

$$F(R) - \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} R^2\right]}{2} = \gamma$$

则置信水平

$$P\{Q_1 Q_2 \subset E\}$$

$$P\{Q_1 Q_2 \subset E\} \geq \gamma$$

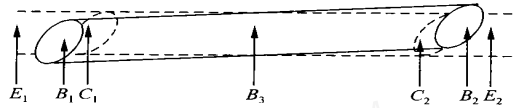


图 4 点域

Fig. 4 The region of points

当  $R$  取值 1.5, 2.0, 2.3, 2.5, 2.6 时, 上述方法建立的置信域的置信水平分别不小于 0.596, 0.827, 0.909, 0.940, 0.957。

若  $\alpha = \beta = \gamma = 0, \delta = 0.9$ , 则  $R = 2.3$ , 置信域宽度为  $2R = 4.6$ 。

#### 4.2 一般线段的置信域

上述均匀线段的置信域是等宽的, 宽度取决于协方差阵和 2 测量点的相对位置。最大、最小宽度分别为误差椭圆的长、短半轴。对一般非均匀线段, 仍可按上述方法建立置信域, 但此时置信域不再是等宽的, 同时  $R$  应满足

$$(1 - \exp\left[-\frac{R^2}{2}\right])^2$$

若  $\delta = 0.9$ , 则  $R = 2.44$ 。由此可见, 对一般非均匀线段, 依上述方法建立的置信域的面积偏大。

### 5 多边形的置信域(环)

设多边形为连接  $Q_1(\mu_1, v_1), \dots, Q_n(\mu_n, v_n)$  所得封闭折线, 记为  $Q_1 Q_2, \dots, Q_n Q_1$ , 对真值  $Q_i(\mu_i, v_i)$  的测量值分别为  $P_i(X_i, Y_i)$ , 其中  $(X_i, Y_i)$  服从  $N(\mu_i, \sigma_i^2; v_i, \tau_i^2)$ , 且  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$  相互独立, 多边形的置信域可以如下方法构造。

如图 5 所示, 以  $(X_i, Y_i)$  为中心作椭圆  $C_i$

$$\{(x, y) | (x - X_i, y - Y_i) B^{-1} (x - X_i, y - Y_i)^T \leq R^2\}$$

以  $C_i, C_{i+1}$  的不交叉的公切线连接  $C_i, C_{i+1}$ , 切线与椭圆的各一侧所围部分记为  $D_i$ , 多边形的置信域可表示为

$$F = \left( \bigcap_{i=1}^n C_i \right) \cap \left( \bigcap_{i=1}^n D_i \right)$$

下面讨论置信域  $F$  的置信水平  $P\{Q_1 Q_2, \dots, Q_n Q_1 \subset F\}$ 。

由图 5 及独立性的假定知,若  $Q_1 C_1, Q_2 C_2, \dots, Q_n C_n$  则

$$Q_1 Q_2, \dots, Q_n Q_1 \subset F$$

从而

$$P\{Q_1 Q_2, \dots, Q_n Q_1 \subset F\} = P\{Q_1 C_1, Q_2 C_2, \dots, Q_n C_n\} = P\{Q_1 C_1\} P\{Q_2 C_2\}, \dots, P\{Q_n C_n\} = (1 - \exp[-\frac{R^2}{2}])^n$$

所以,若  $R$  满足

$$R = \sqrt{-2 \ln(1 - \sqrt[n]{\alpha})}$$

则置信水平

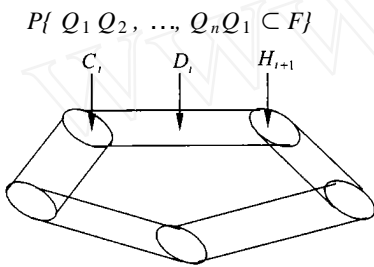


图 5 多边形的置信域

Fig. 5 The confidence region of a polygon

## 6 算例

文献[5]提供了 4 个特征点的误差椭圆的有关参数,现以构成线元 1,3 的 4 个特征点为例,说明置信域的可视化表示方法。设置信水平为  $\alpha = 0.9$ ,特征点  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  的测量值依次为

$$P_1(294.00, 96.00), P_2(298.00, 121.00)$$

$$P_3(505.00, 125.00), P_4(498.00, 103.00)$$

起算数据及置信域的有关参数分别列于表 1 及表 2 中。依表中相应参数绘得置信域如图 6。

表 1 起算数据

Tab. 1 The initial data

点号	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\sigma_{12}$	$a$	$b$
$Q_1$	15.84	15.84	0.00	0	3.98
$Q_2$	15.84	15.84	0.00	0	3.98
$Q_3$	18.91	8.71	-8.3	150	4.90
$Q_4$	18.91	8.71	8.3	30	4.90

表 2 置信域主要参数

Tab. 2 The main parameters of the confidence region

类别	构成	$R$	特征
点	$P_3$	0.9	2.15 一般点
线	$P_1 P_3$	0.9	2.26 均匀线段
多边形	$P_1 P_2 P_3 P_4 P_1$	0.9	2.70 一般线段边界

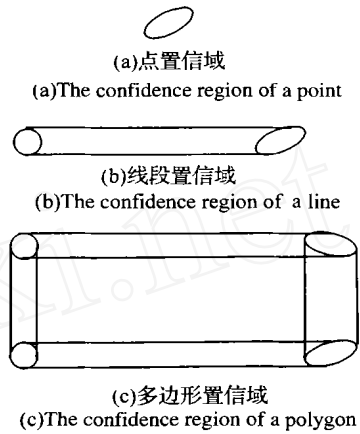


图 6 置信域

Fig. 6 The confidence regions

## 参考文献：

- [1] SHI Weir-zhong. A General Statistical Approach for Handling Uncertainties of Geometric Feature in GIS: From 1 to N Dimensions [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1997, 26 (2) : 160-167. (in Chinese)
- [2] LI De-ren, PEN Mei-yun, ZHANG Ju-qing. Modeling Positional Uncertainty of Line Primitives in GIS [J]. Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1995, 20 (4) : 283-288. (in Chinese)
- [3] SHI Weir-zhong. Theory and Methods for Handling Errors in Spatial Data [M]. Beijing: Science Press, 1998. 88-94. (in Chinese)
- [4] YU Zong-chou, LU Lin-cheng. The Fundamentals of Adjustment [M]. Beijing: The Publishing House of Surveying and Mapping, 1982. 468-470. (in Chinese)
- [5] LIU Wei-bao, DAI Hong-lei, XU Pan-lin, et al. The Analytic Expression of Geometric Figure on Planar Line's Error Band [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1998, 27(3) : 231-237. (in Chinese)