

文章编号:1001-1595(2011)06-0697-06

## 基于空域最小二乘法求解 GOCE 卫星重力场的模拟研究

徐新禹<sup>1,2</sup>, 李建成<sup>1,2</sup>, 姜卫平<sup>1,2</sup>, 邹贤才<sup>1,2</sup>

1. 武汉大学 测绘学院,湖北 武汉 430079; 2. 武汉大学 地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,湖北 武汉 430079

### Simulation Study for Recovering GOCE Satellite Gravity Model Based on Space-wise LS Method

XU Xinyu<sup>1,2</sup>, LI Jiancheng<sup>1,2</sup>, JIANG Weiping<sup>1,2</sup>, ZOU Xiancai<sup>1,2</sup>

1. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China; 2. Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan 430079, China

**Abstract:** The approach to deal with the colored noise in space-wise LS is discussed. The autoregressive (AR) filter is proposed to process the colored noise in the GOCE satellite gravity gradiometry, which is validated by the numerical results. The preconditioned conjugate gradient (PCCG) method and the direct inverse for solving the large normal equation are also verified by the numerical analysis. And the former approach is much faster than the latter one. Combing the radial component  $V_{\infty}$  of the simulated gravity gradient tensor with colored noise and SST observation with white noise, the global gravity field model up to degree and order 180 is estimated by the space-wise LS method and the semi-analytical(SA) approach respectively. The accuracies of geoid and gravity anomaly of the global gravity field model estimated from the space-wise LS method are 3.01 cm and 0.75 mGal(1 Gal =  $10^{-2}$  m/s<sup>2</sup>) respectively, which are better than them from the SA approach.

**Key words:** GOCE satellite; space-wise LS method; preconditioned conjugate gradient(PCCG); semi-analytical(SA); satellite gravity gradiometry; autoregressive(AR) model

**摘 要:** 论述最小二乘过程中有色噪声的处理方法,提出使用自回归模型对 GOCE 梯度观测值中的有色噪声进行时域滤波,数值模拟结果验证该方法的有效性。利用数值模拟验证直接求逆方法和 PCCG 法求解大型法方程的有效性,后者的效率远远高于前者。联合加入噪声(有色噪声和白噪声)的卫星重力梯度张量径向分量观测值  $V_{\infty}$  和 SST 观测值,分别使用空域最小二乘法和半解析法恢复 180 阶全球重力场模型,前者求解重力场模型的大地水准面和重力异常在 180 阶次的精度分别为 3.01 cm 和 0.75 mGal(1 mGal =  $10^{-5}$  m/s<sup>2</sup>),优于半解析法求解模型的精度。

**关键词:** GOCE 卫星;空域最小二乘法;预处理共轭梯度法;半解析法;卫星重力梯度;自回归模型

中图分类号:P223

文献标识码:A

基金项目:国家自然科学基金(40904003;40804004;40637034);武汉大学自主科研项目(4082011)

## 1 引 言

21 世纪初成功实施的 CHAMP(challenging minisatellite payload)和 GRACE(gravity recovery and climate experiment)卫星重力探测计划以前所未有的精度获得了重力场的中、长波信息,为实现本世纪大地测量的宏伟目标——厘米级大地水准面奠定了坚实的基础<sup>[1]</sup>。但由于已实施的卫星重力探测模式以及重力场信号随高度上升快速衰减特性的限制,恢复重力场模型的精度和分辨率仍然很难满足许多地球相关学科的科学目标需求<sup>[2]</sup>。ESA 负责实施的 GOCE(gravity field and steady-state ocean circulation explorer)卫星于 2009 年 3 月 17 日成功发射([http://www.esa.](http://www.esa.int/esaLP/ESAYEK1VMOC_LPgoce_0.html)

[int/esaLP/ESAYEK1VMOC\\_LPgoce\\_0.html](http://www.esa.int/esaLP/ESAYEK1VMOC_LPgoce_0.html)),其采用 SGG(satellite gravity gradiometry)技术和 SST-hl(satellite-to-satellite tracking in the high-low mode)技术相结合的测量模式,SGG 技术的观测量为引力位的二阶导数,能在一定程度上补偿重力场信号随高度产生的衰减,因此期望获得更高精度和分辨率的重力场模型<sup>[3]</sup>。

自 20 世纪 70 年代以来,国内外学者和机构对利用卫星重力梯度观测值恢复地球重力场的相关理论与方法进行了大量的研究,并进行了大量的数值分析与验证<sup>[4-15]</sup>,主要是从空域法和时域法出发讨论。空域法把观测值看做位置的函数,其解算方法主要有积分法、最小二乘配置法、最小二乘谱组合法、空域最小二乘法<sup>[4-5]</sup>。时域法是将

观测值看做沿轨道的时间序列,使用倾角函数表示球谐函数,解算方法一般有两种:时间域时域法和半解析法 (semi-analytical, SA)<sup>[4-5,9,11]</sup>。空域最小二乘法直接利用沿卫星轨道的观测值建立观测方程,由经典的最小二乘方法求解。该方法不对数据进行归算、格网化等处理,同时不需考虑数据中断、跳跃等问题,因而可获得较精确的结果,并提供求解参数完全的方差-协方差矩阵,是一种较为严密的方法。但该方法在处理海量观测值,且观测值中包含有色噪声时,恢复高阶次重力场模型对计算机性能要求较高。空域最小二乘法是 ESA 最终利用 GOCE 卫星任务实测数据确定高精度高分辨率全球重力场的方法之一<sup>[13-14]</sup>。本文主要研究其由 SGG 观测数据求解高阶卫星重力场模型的相关理论、方法及算法。

## 2 数学模型

### 2.1 引力位的二阶导数

地心球坐标系下引力位的二阶导数  $f(r, \theta, \lambda)$  可表示成傅里叶级数形式<sup>[5]</sup>

$$f(r, \theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m^f(r, \theta) \cos m\lambda + B_m^f(r, \theta) \sin m\lambda] \quad (1)$$

表 1 局部指北坐标系中引力梯度张量的 6 个分量所对应傅里叶系数和转换系数的形式

Tab. 1 Fourier coefficients and transformation coefficients of the six components of gravitational gradient tensor in the local north-oriented coordinate system

	$H_{mm}^f(r, \theta)$	$A_m^f(r, \theta)$	$B_m^f(r, \theta)$
$V_{xx}$	$\frac{\lambda_n}{r^2} (\bar{P}''_{mm}(\cos \theta) - (n+1)\bar{P}_{mm}(\cos \theta))$	$\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{C}_{mm}$	$\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{S}_{mm}$
$V_{xy}$	$\frac{\lambda_n}{r^2} m \sin^{-1} \theta (\bar{P}'_{mm}(\cos \theta) - \cot \theta \bar{P}_{mm}(\cos \theta))$	$\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{S}_{mm}$	$-\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{C}_{mm}$
$V_{xz}$	$\frac{\lambda_n}{r^2} (n+2) \bar{P}'_{mm}(\cos \theta)$	$\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{C}_{mm}$	$\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{S}_{mm}$
$V_{yz}$	$\frac{\lambda_n}{r^2} (\cot \theta \bar{P}'_{mm}(\cos \theta) - (n+1+m^2 \sin^{-2} \theta) \bar{P}_{mm}(\cos \theta))$	$\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{C}_{mm}$	$\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{S}_{mm}$
$V_{yx}$	$\frac{\lambda_n}{r^2} m(n+2) \sin^{-1} \theta \bar{P}_{mm}(\cos \theta)$	$\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{S}_{mm}$	$-\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{C}_{mm}$
$V_{zx}$	$\frac{\lambda_n}{r^2} (n+1)(n+2) \bar{P}_{mm}(\cos \theta)$	$\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{C}_{mm}$	$\sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \bar{S}_{mm}$

其中,  $\bar{P}'_{mm}(\cos \theta) = \frac{\partial \bar{P}_{mm}(\cos \theta)}{\partial \theta}$ ;  $\bar{P}''_{mm}(\cos \theta) = \frac{\partial^2 \bar{P}_{mm}(\cos \theta)}{\partial \theta^2}$

### 2.2 空域最小二乘法的数学模型及有色噪声处理方法

从式(1)可看出卫星引力梯度观测值是卫星

式中,

$$\left. \begin{matrix} A_m^f(r, \theta) \\ B_m^f(r, \theta) \end{matrix} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} H_{mm}^f(r, \theta) \left\{ \begin{matrix} \bar{C}_{mm} \\ \bar{S}_{mm} \end{matrix} \right.$$

$r, \theta, \lambda$  分别表示地心球坐标的半径、地心余纬 ( $90^\circ -$ 地心纬度  $\varphi$ )、地心经度;  $n, m$  是球谐展开的阶和次;  $\bar{C}_{mm}, \bar{S}_{mm}$  是正规化的  $n$  阶  $m$  次引力位球谐系数;  $\bar{P}_{mm}(\cos \theta)$  为完全规格化缔合勒让德函数;  $A_m^f(r, \theta), B_m^f(r, \theta)$  为傅里叶系数;  $H_{mm}^f(r, \theta)$  为其与引力位系数之间的转换系数,不同引力位函数对应不同形式的傅里叶系数和转换系数。根据局部指北坐标系 ( $x, y, z$ ) 的定义 ( $x$  轴指向北,  $y$  轴指向西,  $z$  轴径向朝外) 及其与地心球坐标 ( $r, \theta, \lambda$ ) 之间的关系,可推导出其中引力梯度张量球谐级数展开式中傅里叶系数和转换系数的形式,如表 1 所示,其中,  $\lambda_n = \frac{GM}{R} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}$ ,  $GM$  为地球万有引力常数与地球质量的乘积,  $R$  是地球平均半径。本文的模拟试算均在局部指北坐标系下进行,该坐标系是 GOCE 任务实测梯度数据处理中采用的坐标系之一。

位置和重力场模型参数的函数。从严格意义上说,卫星位置和重力场参数都是未知的,因此观测方程是非线性的,在实际使用中需要线性化以便

同时求解位置和重力场参数。考虑到 GOCE 任务的精密定轨技术已经可达厘米水平,经验证 5 cm 的轨道误差对引力梯度张量观测值影响的最大量为 0.04 mE,这相对于 GOCE 卫星重力梯度仪在测量带宽内 3 mE 的精度可忽略不计<sup>[3]</sup>,因此可认为卫星位置已知。在引入正常引力场的情况下,可建立如下观测方程

$$\Delta\Gamma_{ij}(P) = T_{ij}(P) + \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

式中,  $\Delta\Gamma_{ij}(P)$  表示引力梯度异常,是引力位梯度与正常位梯度之差;  $T_{ij}(P)$  为扰动引力梯度,  $\varepsilon_{ij}$  表示观测误差以及模型误差;  $P$  表示精密定轨技术确定的卫星位置。式(2)中仅包含重力场位系数参数,可由卫星轨道上每个点的观测值形成方程组,将  $T_{ij}(P)$  展开如式(1)的形式,则式(2)对应的线性 Gauss-Markov 观测模型和统计模型为

$$\left. \begin{aligned} y &= Ax + \varepsilon \\ E\{y\} &= Ax \\ D\{y\} &= \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中,  $y$  表示梯度观测值向量,既可是引力梯度异常的单个分量,也可是多个分量的组合;  $A$  为设计矩阵;  $x$  表示位系数参数向量;  $\varepsilon$  为观测误差向量;  $\sigma_0^2$  为单位权方差;  $Q$  为观测值的误差协方差矩阵;  $P$  为观测值的权。根据经典线性最小二乘原理可求得式(3)的最优无偏估计解

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P y \quad (4)$$

GOCE 任务梯度观测值中包含有色噪声,将导致形成的误差协方差矩阵  $Q$  不再是对角阵,且随着观测量的增多,该矩阵维数不断增大,给直接处理协方差矩阵(求逆、乘积等)带来困难,因而需要找到合适的方法处理有色噪声带来的计算问题。根据 GOCE 任务重力梯度测量误差的特性,误差时间序列为广义平稳随机信号,若假设观测值为周期的等间隔(空间)采样或者为格网点值,则  $Q$  是一个循环 Toeplitz 矩阵,但是  $Q$  的逆将破坏其原有的循环 Toeplitz 结构。若将  $Q$  分解为两个三角矩阵的乘积  $Q = R^T R$ ,根据矩阵运算规律  $(R^T R)^{-1} = R^{-1} (R^{-1})^T$ 、式(3)和式(4)可推导出如下法方程

$$A^T (R^T R)^{-1} A \hat{x} = A^T (R^T R)^{-1} y \quad (5)$$

令  $F = (R^{-1})^T$ ,  $\bar{A} = FA$ ,  $\bar{y} = Fy$ ,其中  $\bar{y}$  为新观测值,代入式(5)可得

$$\bar{A}^T \bar{A} \hat{x} = \bar{A}^T \bar{y} \quad (6)$$

式(6)为观测值  $\bar{y}$  对应的法方程,根据协方差传播率,其协方差矩阵  $\bar{Q} = FQF^T = I$  为单位

阵,由此可看出最小二乘加权过程是一个去相关(白噪声化)过程,以上的去相关过程适合于任何协方差矩阵,但如果协方差矩阵拥有特殊的结构,例如周期等间隔(空间)采样数据可使协方差阵具有循环的 Toeplitz 结构,其分解矩阵  $R$  和  $F$  将是三角 Toeplitz 矩阵,其与向量  $y$  的乘积可看做是矩阵  $F$  的第一列  $f$  与该向量的卷积,表示为

$$\bar{y} = f * y, \quad \bar{y}(i) = \sum_{k=1}^i f(k) y(i-k), \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

该卷积过程可看做一个离散线性移不变系统,向量  $f$  对应滤波器的脉冲响应。该过程可利用 FFT 算法快速计算(时域卷积在频域内为简单的乘积),首先将时域内的时间序列转换到频域内,滤波后再转换到时域内,该方法可为频域滤波;根据信号处理理论中的相关定理,信号的自相关函数与 PSD(power spectral density)成傅里叶变换对,因此还可通过噪声特性构造时域滤波器,例如基于 AR(autoregressive)模型的高通滤波器,这样空域最小二乘中有色噪声的处理过程就变成了一个时域滤波过程。

需要指出,求解高阶重力场模型的最小二乘方法非常耗时,尤其是法方程的解算,本文将对直接求逆法和 PCCG(preconditioned conjugate gradient)进行模拟比较,前者是对法方程矩阵严格求逆,优点是可以获得参数的方差-协方差矩阵(可表征求解参数的精度),后者通过迭代快速解算法方程,但无法严格给出求解参数的精度信息。

### 3 数值分析

#### 3.1 滤波方法的分析与验证

为验证基于 AR 模型的时域滤波方法的有效性,本文基于先验误差 PSD 模拟了 30 d 5 s 采样的有色噪声时间序列,其统计特性如表 2 所示,统计量的单位为 E(Eötös),先验误差 PSD 的解析形式为<sup>[16]</sup>

$$S(f) = \frac{S_0}{1 - e^{-f/f_0}} \quad (8)$$

式中,  $S_0 = 3.2 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ ;  $f_0 = 27 \text{ cpr}/T_r \approx 0.005 \text{ Hz}$ , cpr (cycles per revolution) 表示频率的单位;  $T_r$  表示轨道每圈的旋转周期(约为 5 400 s)。需要指出,该表达式并未考虑频率大于 0.1 Hz 的情

况,其对应观测值的最小采样间隔为 5 s。

表 2 模拟有色噪声误差时间序列的统计结果

Tab. 2 Statistical results of the simulated colored noise time series

周期 /d	采样间隔 /s	平均值 /E	最大值 /E	最小值 /E	均方差 (RMS)/E
30	5	0.008 5	0.094 9	-0.059 2	0.028 9

本文取先验误差 PSD 的倒数来构造 AR 高通滤波器,AR 模型的最高阶取 8 640,首先用先验解析形式的误差 PSD 的倒数计算自相关函数,再利用得到的自相关函数计算 AR 模型的参数以形成时域滤波器,利用其对模拟的噪声时间序列进行滤波处理,为分析滤波的效果,验证该方法的有效性,图 1、图 2 和图 3 分别为滤波前后噪声时间序列、分布图和协方差函数图。从图中可明显看出,滤波前噪声时间序列具有一定的相关性,且不具备正态分布特性,时间序列曲线呈现一定的规律性,具有明显的有色噪声特性;滤波后噪声时间序列呈现正态分布,且不存在相关性,其时间序列分布也显示出随机噪声的特性。结果充分说明采用构造的 AR 滤波器对 GOCE 梯度观测值有色噪声的滤波非常有效,滤波过程是白噪声化的过程,即消除噪声时间序列的相关性,这与 2.2 节中的理论分析一致。

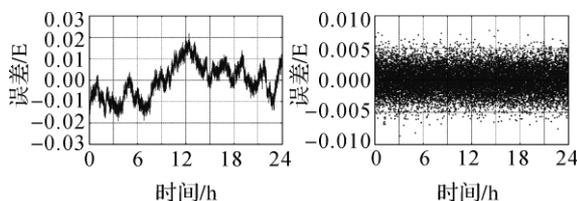


图 1 滤波前(左)、后(右)的噪声时间序列

Fig. 1 Noise time series before (left) and after (right) filtering

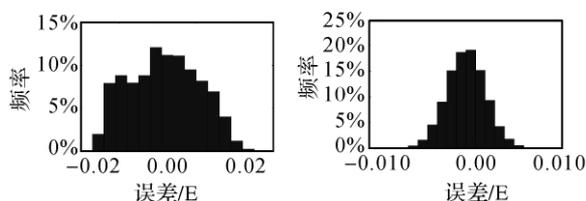


图 2 滤波前(左)、后(右)噪声时间序列的分布

Fig. 2 Distribution of noise time series before (left) and after (right) filtering

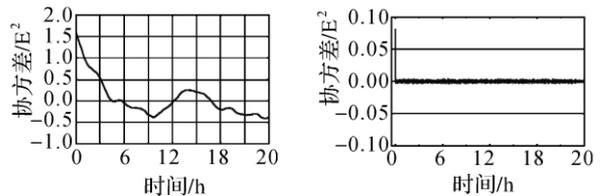


图 3 滤波前(左)、后(右)噪声时间序列的协方差函数

Fig. 3 Covariance function of noise time series before (left) and after (right) filtering

### 3.2 恢复 180 阶重力场模型的数值分析

为了分析空域最小二乘法求解 GOCE 卫星重力场的精度及运行效率,并将其与 SA 方法进行比较,本文模拟了 GOCE 任务 29 d 的观测数据,采样间隔为 5 s,EGM96 为轨道模拟的参考模型,轨道倾角约为  $96.7^\circ$ ,偏心率为 0.001,轨道的平均高度为 245 km,是一个近似重复轨道,选择 GFZ 发布的 EIGEN\_CG03C 重力场模型模拟引力梯度张量观测值,模型最高阶取至 180。SST 观测值的模拟采用 EIGEN\_CG03C 模型计算沿模拟卫星轨道的引力位来实现,模型的最高阶为 80 阶,加入方差为  $0.5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  的白噪声,其相应于方差为 5 cm 的位置误差和  $10^{-4} \text{ m/s}$  的速度误差。下面的数值分析仅以重力梯度的径向分量  $V_{rr}$  为例,其在引力梯度张量中量级最大,加入有色噪声的统计特性如表 2 所示。

在使用空域最小二乘法求解地球重力场模型之前,首先对直接求逆法和 PCCG 方法求解法方程的有效性 & 软件模块性能进行测试,测试平台为 IBM P5-575,该小型机共有 24 个 64 位 1.9 GHz 的 POWER5 CPU,测试数据选用不包含误差的引力梯度张量观测值的径向分量  $V_{rr}$ 。需要指出本文所采用的直接求逆法和 PCCG 方法均是在已形成法方程的基础上进行的,对于由大量的观测数据求解高阶重力场模型来说,形成法方程也是一个非常耗时的过程,根据法方程的计算特性,可采用多线程提高计算效率。基于直接求逆方法和 PCCG 方法由无误差的观测值得模型的阶误差均方差如图 4 所示,图中实线表示 EIGEN\_CG03C 模型的信号阶次方差均方差(下同),点虚线表示直接求逆得到模型的阶误差均方差,短划虚线表示 PCCG 方法求得模型的阶误差均方差,前者计算需要约 13 d,后者仅需 30 min 经过 25 次迭代即可收敛。需要指出本文求解结果的比较均是相对于 EIGEN\_CG03C 模型,对于模拟试算来说,其

相当于“真”实场,阶误差均方差的计算公式为

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{2n+1} \sum_{m=0}^n [(C_{nm}^{(EST)} - C_{nm}^{(REF)})^2 + (S_{nm}^{(EST)} - S_{nm}^{(REF)})^2]} \quad (9)$$

式中,  $n, m$  为模型的阶次;上标‘EST’表示求解的重力场模型,‘REF’表示“真”实重力场模型。

从图 4 中可看出,两种方法均能以较高的精度( $10^{-15} \sim 10^{-13}$ )恢复位系数,求解模型的大地水准面和重力异常误差均方差在纬度  $\pm 80^\circ$  范围内量级分别为  $10^{-3}$  cm 和  $10^{-4}$  mGal,在纬度  $\pm 90^\circ$  范围内量级分别为  $10^{-2}$  cm 和  $10^{-2}$  mGal,这说明求解结果受到了极区无观测数据的影响,导致求解过程不稳定。从求解结果还可看出直接求逆方法比 PCCG 方法更精确,但 PCCG 方法的速度要快很多,虽然精度略有降低,但足以满足求解的精度要求。需要指出,运算中并未使用任何正则化技术,图中的阶误差均方差在接近 180 阶处有跳跃,应该是高阶重力场数值不稳定性引起的。

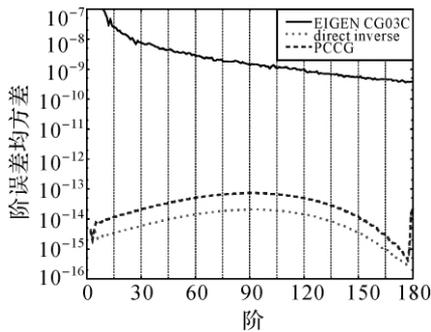


图 4 利用直接求逆方法和 PCCG 方法求得模型的阶误差均方差

Fig. 4 Degree error RMS of the gravity model estimated from the direct inverse and the PCCG method

基于包含误差(有色噪声和白噪声)的引力梯度张量径向分量  $V_{zz}$  和 SST 观测值,分别利用 SA 方法和空域最小二乘法恢复重力场模型的阶误差均方差,如图 5 所示,其中点虚线表示 SA 方法求得模型的阶误差均方差,短划线虚线表示采用了 AR 滤波的空域最小二乘法求得模型的阶均方差,短划线一点虚线表示未采用滤波的空域最小二乘法求得模型的阶均方差,对于 GOCE 卫星高阶地球重力场的确定,由于极空白、重力场信号向下延拓的误差放大、有色噪声等原因都将使最小二

乘的法方程具有较强的病态性,需要采用正则化技术来稳定求解过程,本文采用 Kaula 正则化方法。形成法方程系数阵时采用时域滤波策略,分别采用 PCCG 方法和直接求逆法求解,经比较求解结果,发现在观测值包含误差的情况下,两种方法解算的结果几乎一致,这进一步表明 PCCG 方法求解法方程过程的快速有效性。限于篇幅,本文未给出 SA 方法的数学模型及解算方法,其具体实现及模拟计算结果可参阅文献[17]。本文所用观测值联合求解的方法是通过法方程矩阵加权叠加实现的,即每一类观测值单独形成法方程矩阵,最后进行法方程叠加。

从图中可看出,采用加权策略(使用 AR 滤波实现),可大大改善求解结果的精度,在整个频谱范围内均有很大提高,这也说明卫星重力梯度观测值中大的低频误差不仅影响重力场求解的低频部分。采用空域最小二乘法求解的结果优于 SA 方法的结果,位系数精度在 20 到 120 阶的范围有明显提高,显示出空域最小二乘法求解过程的严密性。为了进一步比较求解模型的精度,表 3 给出了两种方法求解模型的大地水准面和重力异常误差统计结果。从表中可看出,不论是全球还是局部范围内,空域最小二乘法求解模型的精度均优于 SA 方法,尤其是全球的统计结果,这说明了空域最小二乘法较 SA 方法求解更稳定,受极空白区域的影响相对较小。虽然空域最小二乘法求解模型的精度较 SA 方法有提高,但并没有量级上的差异,大地水准面在  $\pm 80^\circ$  范围内均为几个厘米,重力异常的精度在 1 mGal 以内,基本达到 GOCE 任务的目标要求。

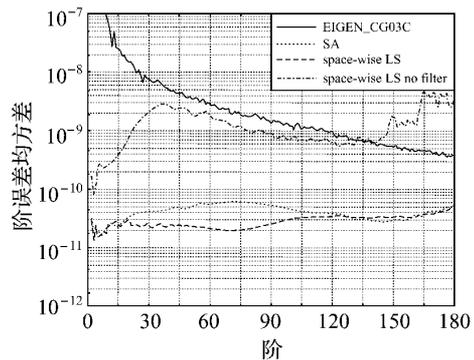


图 5 由空域最小二乘法和 SA 方法求解模型的阶误差均方差

Fig. 5 Degree error RMS of the gravity model estimated from space-wise LS method and SA approach

表 3 由空域最小二乘法和 SA 方法求解模型的大地水准面和重力异常误差统计

Tab. 3 Statistics of geoid error and gravity anomaly error of the gravity model estimated from space-wise LS method and SA approach

方法	比较参量	平均值	最大值	最小值	RMS <sub>±80°</sub>	RMS <sub>±90°</sub>
空域最小二乘	大地水准面 /cm	0.01	14.00	-14.50	3.01	17.00
	重力异常 /mGal	0.00	3.31	-3.54	0.75	3.24
SA	大地水准面 /cm	0.01	29.50	-30.90	3.96	43.75
	重力异常 /mGal	0.00	6.95	-7.08	0.89	7.08

此外,在本文模拟计算的情况下,空域最小二乘法以 11 个 CPU 同时计算大约需两周时间,同样的求解条件下,SA 方法使用 1 个 CPU 仅需 3 h,所需内存也远小于空域最小二乘法,可见 SA 方法是一种快速有效的解算方法,但前面的分析比较是在观测值具有连续采样、近似重复等特性的基础上讨论的,若考虑数据有间断、非严格周期等情况,SA 方法受到模型误差的影响会增大,此时可以预见空域最小二乘法相比 SA 方法应该有更好的稳定性。

#### 4 结 论

本文研究了空域最小二乘法求解高阶 GOCE 卫星重力场的相关理论、方法与算法,提出基于 AR 模型对最小二乘过程中的有色噪声进行滤波处理,数值模拟结果说明了该方法的有效性。直接求逆法和 PCCG 法用于法方程求解的数值比较结果说明两者均能获得较高精度的解,PCCG 效率更高,但无法提供完全的方差-协方差矩阵。基于含有误差(有色噪声和白噪声)的 GOCE 卫星任务模拟数据  $V_{zz}$  和 SST,分别利用空域最小二乘法和 SA 方法分别恢复了 180 阶全球重力场模型,前者求解模型的精度优于后者,但 SA 方法所需的计算时间和资源都远小于空域最小二乘法。在未知实测数据真实特性的情况下,很难预见 SA 方法处理实测数据的性能,空域最小二乘法是一种可用于 GOCE 实测数据处理的稳定和较为严密的方法。需要指出,空域最小二乘法的快速解算问题需要作进一步研究,在当前拥有的计算机资源的条件下,若要对将来实测数据进行处理(更长周期、多种类型的引力梯度观测值,包括  $V_{xx}$ 、 $V_{yy}$  等),研究并行算法在空域最小二乘解算(法方程形成、滤波、求逆以及正则化等运算)中的应用非常必要。

#### 参考文献:

[1] ZOU Xiancai. Theory of Satellite Orbit and Earth Gravity

Field Determination [D]. Wuhan: Wuhan University, 2007. (邹贤才. 卫星轨道理论与地球重力场模型的确定 [D]. 武汉: 武汉大学, 2007.)

- [2] XU Xinyu, LI Jiancheng, ZOU Xiancai, et al. GOCE Gravity Explorer Mission [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2006, 26(4):49-55. (徐新禹, 李建成, 邹贤才, 等. GOCE 卫星重力探测任务 [J]. 大地测量与地球动力学, 2006, 26(4):49-55.)
- [3] ESA. Gravity Field and Steady-state Ocean Circulation Mission: Report for Mission Selection, the Four Candidate Earth Explorer Missions[R]. Noordwijk: ESA Publications Division, 1999.
- [4] RUMMEL R, VAN GELDEREN M, KOOP R, et al. Spherical Harmonic Analysis of Satellite Gradiometry [R]. Delft: Netherlands Geodetic Commission, 1993.
- [5] KOOP R. Global Gravity Field Modeling Using Satellite Gravity Gradiometry [R]. Delft: Netherlands Geodetic Commission, 1993.
- [6] LUO Zhicai. The Theory and Methodology of Determining the Earth's Gravity Field Using Satellite Gravity Gradiometry Data [D]. Wuhan: Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1996. (罗志才. 利用卫星重力梯度数据确定地球重力场的理论和方法 [D]. 武汉: 武汉测绘科技大学, 1996.)
- [7] TSCHERNING C C. Computation of Spherical Harmonic Coefficients and Their Error Estimates Using Least Squares Collocation [J]. Journal of Geodesy, 2001, 75(1): 12-18.
- [8] WENZEL H G. Geoid Computation by Least Squares Spectral Combination Using Integral Kernels[C]// Proceedings of the International Association of Geodesy General Meeting. Tokyo: IAG, 1982: 438-453.
- [9] KLEES R, KOOP R, VISSER P, et al. Efficient Gravity Field Recovery from GOCE Gravity Gradient Observations [J]. Journal of Geodesy, 2000, 74 (7-8):561-571.
- [10] SCHUH W D, PAIL R, PLANK G. Assessment of Different Numerical Solution Strategies for Gravity Field Recovery [C]// Proceedings of the "International GOCE User Workshop". Noordwijk: ESA Publications Division, 2001: 87-95.
- [11] SNEEUW N J. A Semi-analytical Approach to Gravity Field Analysis from Satellite Observations [D]. Munich:

(下转第 709 页)

- 双根,等. 基于 GPS 观测数据的汶川地震断层形变反演分析[J]. 测绘学报, 2009, 38(2): 108-113.)
- [8] XU Caijun, LIU Yang, WEN Yangmao.  $M_w 7.9$  Wenchuan Earthquake Slip Distribution Inversion from GPS Measurements[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2009, 38(3): 195-201. (许才军, 刘洋, 温扬茂. 利用 GPS 资料反演汶川  $M_w 7.9$  级地震滑动分布[J]. 测绘学报, 2009, 38(3): 195-201.)
- [9] TAN Kai, LI Jie, WANG Qi. Lithospheric Rheological Structure Constrained by Geodetic Data in Altay [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2007, 50, (6): 1713-1718. (谭凯, 李杰, 王琪. 大地测量约束下的阿尔泰山岩石圈流变结构 [J]. 地球物理学报, 2007, 50 (6): 1713-1718.)
- [10] TAN Kai, WANG Qi, WANG Xiaoqiang, et al. Analytic Models and Space-time Distribution of Postseismic Deformation[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2005, 25(4): 23-26. (谭凯, 王琪, 王晓强, 等. 震后形变的解析模型和时空分布特征[J]. 大地测量与地球动力学, 2005, 25(4): 23-26.)
- [11] SHEN Zhengkang, SUN Jianbao, Zhang Peizhen, et al. Slip Maxima at Fault Junctions and Rupturing of Barriers during the 12 May 2008 Wenchuan Earthquake [J]. Nature Geoscience, 2009, 2: 718-728.
- [12] OKADA Y. Surface Deformation due to Shear and Tensile Faults in a Half-space[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1985, 75: 1135-1154.
- [13] CERVELLI P. Using Geodetic Data to Infer the Kinematic and Mechanical Properties of Deformation Source on Kilauea Volcano, Hawaii[D]. Stanford: Stanford University, 2002.
- [14] BASU A, FRAZER L N. Rapid Determination of the Critical Temperature in Simulated Annealing Inversion[J]. Science, 1990, 249: 1409-1412.
- [15] HANKS T C, KANAMORI H. A Moment Magnitude Scale[J]. Journal of Geophysical Research, 1979, 84 (B5): 2348-2350.
- [16] WANG Weimin, ZHAO Lianfeng, LI Juan, et al. Rupture Process of the Ms 8.0 Wenchuan Earthquake of Sichuan, China[J]. Chinese J Geophys, 2008, 51(5): 1403-1410. (王卫民, 赵连锋, 李娟, 等. 四川汶川 8.0 级地震震源过程[J]. 地球物理学报, 2008, 51(5): 1403-1410.)

(责任编辑:丛树平)

收稿日期: 2010-04-20

修回日期: 2011-09-05

第一作者简介: 谭凯(1972—),男,博士,副研究员,研究方向为大地测量与地球动力学。

First author: TAN Kai(1972—), male, PhD, associate professor, majors in geodesy and geodynamics.

E-mail: whgpstan@hotmail.com

## (上接第 702 页)

Institute of Astronomy and Physical Geodesy, Technical University of Munich, 2000.

- [12] PAIL R, PLANK G. Assessment of Three Numerical Solution Strategies for Gravity Field Recovery from GOCE Satellite Gravity Gradiometry Implemented on a Parallel Platform [J]. Journal of Geodesy, 2002, 76 (8): 462-474.
- [13] PAIL R, PLANK G. GOCE Gravity Field Processing Strategy [J]. Studia Geophysica et Geodaetica, 2004, 48 (2): 289-309.
- [14] RUMMEL R, GRUBER T, KOOP R. High Level Processing Facility for GOCE: Products and Processing Strategy[C]// Proceedings of the Second International GOCE User Workshop, "GOCE, The Geoid and Oceanography". Frascati: ESA-ESRIN, 2004.
- [15] XU Xinyu, LI Jiancheng, WANG Zhengtao, et al. The Simulation Research on the Tikhonov Regularization Applied in Gravity Field Determination of GOCE Satellite Mission[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2010, 39(4): 465-470. (徐新禹, 李建成, 王正涛, 等. Tikhonov 正则化方法在 GOCE 重力场求解中的模拟研究 [J]. 测绘学报, 2010, 39(4): 465-470.)
- [16] XU Xinyu, WANG Zhengtao, ZOU Xiancai, et al. The Research on Analysis and Simulation of Satellite Gravity Gradiometry Error of GOCE [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2010, 30(2): 71-75. (徐新禹, 王正涛, 邹贤才, 等. GOCE 卫星重力梯度测量误差分析及其模拟研究 [J]. 大地测量与地球动力学, 2010, 30 (2): 71-75.)
- [17] XU Xinyu, LI Jiancheng, JIANG Weiping, et al. The Fast Analysis of GOCE Gravity Field [C]// International Association of Geodesy Symposia: Observing Our Changing Earth. Berlin: Springer, 2009, 133: 379-385.

(责任编辑:雷秀丽)

收稿日期: 2010-12-06

修回日期: 2011-02-23

第一作者简介: 徐新禹(1978—),男,博士,讲师,主要研究方向为卫星大地测量。

First author: XU Xinyu (1978—), male, PhD, lecturer, majors in satellite geodesy.

E-mail: xyxu@sigg.whu.edu.cn