

平方根滤波的优越性分析

董春敏, 周 伟, 曹振坦, 张会娟

(山东科技大学 海岛(礁)测绘技术国家测绘局重点实验室, 山东 青岛 266510)

摘要: 文章用计算机语言(MATLAB)完成了常规 Kalman(卡尔曼)滤波和平方根滤波的实现过程,并且用实测数据比较和分析了常规 Kalman 滤波和平方根滤波在处理病态矩阵时的表现,试验验证了平方根滤波对病态矩阵的处理具有明显的优越性。

关键词: MATLAB; 平方根滤波; 病态矩阵

中图分类号: TP301.6 **文献标识码:** B **文章编号:** 1672-5867(2012)01-0066-03

The Superiority Analysis of the Square-root Kalman Filter

DONG Chun-min, ZHOU Wei, CAO Zhen-tan, ZHANG Hui-juan

(Key Laboratory of Surveying and Mapping Technology on Island and Reef, State Bureau of Surveying and Mapping, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China)

Abstract: With the help of MATLAB language, this paper completed the implementation process of conventional Kalman filter and the square-root Kalman filter and then compared and analyzed their performance when dealing with pathological matrix. It verified that the square-root Kalman filter has obvious superiority in dealing with pathological matrix.

Key words: MATLAB; square-root Kalman filter; pathological matrix

0 引 言

Kalman 滤波应用范围广泛,设计方法也简单易行,但它必须在计算机上执行。随着微型计算机的普及应用,人们对 Kalman 滤波的数值稳定性、计算效率、实用性和有效性的要求越来越高。由于计算机的字长有限,使计算中舍入误差和截断误差累计、传递,造成误差方程阵 P_k 失去对称正定性,造成数值不稳定。在 Kalman 滤波理论的发展过程中,为改善 Kalman 滤波算法的数值稳定性,并提高计算效率,人们提出平方根滤波、UD 分解滤波、奇异值分解滤波等一系列数值鲁棒的滤波算法。

首先提出平方根滤波思想的是 Potter,该平方根滤波算法经美国阿波罗登月舱的实际应用,证明是很成功的。Bierman, Carlson 和 Schmidt 等人对平方根滤波算法的发展贡献极大。平方根滤波在轨道确定、飞行状态估计和多传感器跟踪与辨识等方面得到了应用。传统的 Kalman 滤波是建立在模型精确和随机干扰信号统计特性已知基础上的,对于一个实际系统,往往存在着模型不确定性或干扰信号统计特性不完全已知,这些不确定因素使得传统的 Kalman 滤波算法失去最优性,估计精度大大降低,严

重时会引起滤波发散^[1]。因此,本文就平方根滤波和常规 Kalman 滤波进行了实例比较分析,为 Kalman 滤波的进一步研究工作提供了理论支持。

1 平方根滤波

平方根滤波作为数值鲁棒的鲁棒算法。

1.1 平方根滤波的算法

协方差 $\Sigma \hat{X}_k$ 通常为非负定矩阵。然而,在滤波的叠代过程中,由于计算误差等因素的影响,致使滤波协方差不对称或负定,从而导致滤波器发散,影响滤波算法的收敛速度和稳定性,因此,将 $\Sigma \hat{X}_k$ 分解为: $\Sigma \hat{X}_k = S_{\hat{X}_k}$, 式中, $S_{\hat{X}_k}$ 被称为 $\Sigma \hat{X}_k$ 的平方根矩阵,可通过 Cholesky 分解获得。在滤波过程中,用 $S_{\hat{X}_k}$ 代替 $\Sigma \hat{X}_k$ 的非负定性,而且在数值中,计算 $S_{\hat{X}_k}$ 的字长只需计算 $\Sigma \hat{X}_k$ 字长的一半,就能达到相同的精度^[2]。

1.2 平方根滤波的特点

Kalman 滤波方程进行协方差矩阵的传递过程中,最容易发生的数值问题就是由于舍入误差的影响,状态协

收稿日期: 2010-12-2

基金项目: 国家自然科学基金项目(40874001); 海岛(礁)测绘技术国家测绘局重点实验室项目(2010A01)资助

作者简介: 董春敏(1985-),女,山东滨州人,大地测量学与测量工程专业硕士研究生,主要研究方向为 Kalman 滤波在相位解缠中的应用。

方差矩阵失去对称性和正定性,从而导致滤波器失效。针对这个问题,学者们提出了平方根滤波这一方案,即在 Kalman 滤波方程中不传递易失去正定性的协方差矩阵,取而代之的是传递其平方根,这样这个分解因子的平方在任何时候都能保证正定性。平方根滤波结合了良好的数值特性和中等的计算负担,在工程实现中表现出优良的性质,同时,在处理异常矩阵时,它的双精度特性也能够给滤波器性能上给出重要的改进,在航空航天领域成为传统 Kalman 滤波算法的有力替代者^[6]。

2 实例分析

平方根滤波过程如下:给定初始值 X_0 和 P_0 ,对 P_0 进行 UD 分解得到 U_0, D_0 ; 结合 thornton 的时间更新过程给出更新后的状态值 X 和 U, D 值,然后套用 Bierman 的量测更新程序得到更新后的状态估计值 X 。常规 Kalman 滤波只需根据 Kalman 滤波程序便可得到滤波后的状态估计值 X 。

设有一常速模型如下:

状态模型为:

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega$$

量测模型为: $z = [1] \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} + v$

$$Q_c = E(ww^T)$$

其中

$$R = E(vv^T)$$

$$\sum \hat{X}_k = S_{X_i}^T S_{X_i}$$

根据连续系统的离散化方法,设系统的采样间隔为 $\Delta T = 0.1$,则状态一步转移矩阵为:

$$\Phi_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kalman 滤波的状态模型和量测模型如下:

$$x_k = \Phi_{k,k-1} x_{k-1} + w_{k-1}$$

$$z_k = H_k x_k + v_k$$

设定常系统的各参数矩阵为:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0], Q = 0,$$

$$P_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = \varepsilon^2 (\varepsilon \leq 1)$$

在上述模型下,常规 Kalman 滤波与平方根滤波滤波后的仿真效果如图 1 所示。

位置估计:

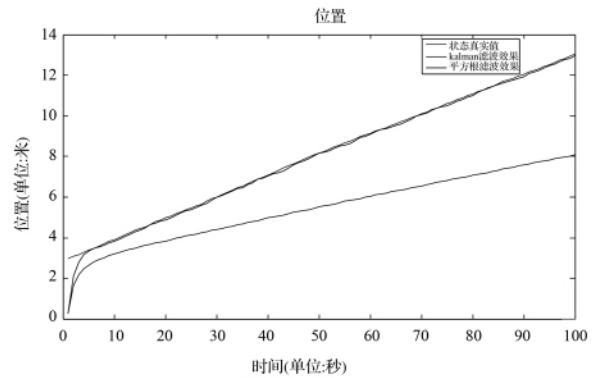


图 1 常规 Kalman 滤波与平方根滤波位置估计比较

Fig. 1 Comparison of position estimation between conventional Kalman filter and square-root Kalman filter

从图 1 中可以明显地看出,对于病态矩阵,常规 Kalman 滤波仿真发散,量测值已失去修正作用,滤波估计值与真实值偏差越来越大;而对于平方根滤波,仿真效果却很好,在真实值附近有略微的波动,基本上能够用来模拟真实系统的状态。

下面定量地描述两者与真实值之间的差值(见表 1)。

从表 1 可以看出,随着滤波的递推和滤波步数的增加,常规 Kalman 滤波与位置真实值的误差越来越大,滤波已经发散;而平方根滤波与真实值的差值却相对较小,在真实值附近波动。由此验证了平方根滤波在处理病态矩阵方面较常规 Kalman 滤波的优越性。

表 1 常规 Kalman 滤波与平方根滤波仿真差值数据比较

Tab. 1 Comparison of emulation difference between conventional Kalman filter and square-root Kalman filter

编号	1	2	3	4	5	6	7
Kalman 滤波与位置差值	2.708	0.690	0.847	1.596	2.060	2.610	3.048
平方根滤波与位置差值	2.706	0.063	0.089	0.031	0.018	0.019	0.056

下面通过滤波增益矩阵 K 来解释具体原因(如图 2 所示)。

从图 2 中可以看出,常规 Kalman 滤波与平方根滤波增益矩阵变化趋势基本一致,但也有不同,对最后的趋势进行局部的放大,得到图 3 所示的结果。

从图 3 可以看出,由于实际模型为病态模型,导致随着滤波的递推进行,对于常规 Kalman 滤波,增益矩阵 K

逐渐趋近于零,即增益矩阵的加权作用逐步丧失,使得量测值失去修正作用,最终导致滤波发散;相反,平方根滤波的增益矩阵 K 最后趋于恒定值 0.016 2,对量测值的修正作用继续有效,使得滤波能正常进行,滤波估计值与真实值之间的误差越来越小,从而抑制了滤波发散。

结合图 1~图 3 和表 1 可以看出,平方根滤波不但可以保证协因数阵 P_k 的对称正定性,而且对于病态矩阵,也

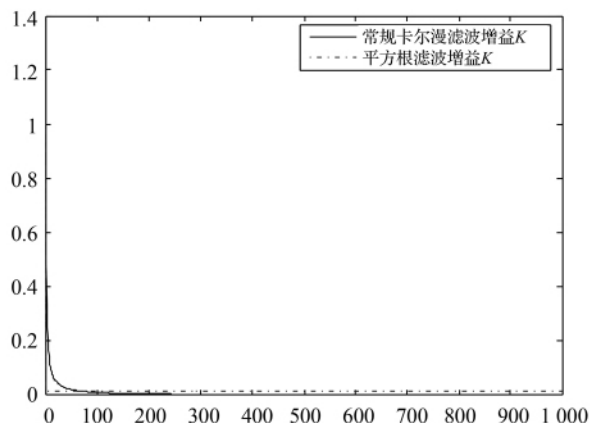


图2 常规 Kalman 滤波与平方根滤波增益矩阵比较
Fig. 2 Comparison of gain matrix between conventional Kalman filter and square-root Kalman filter

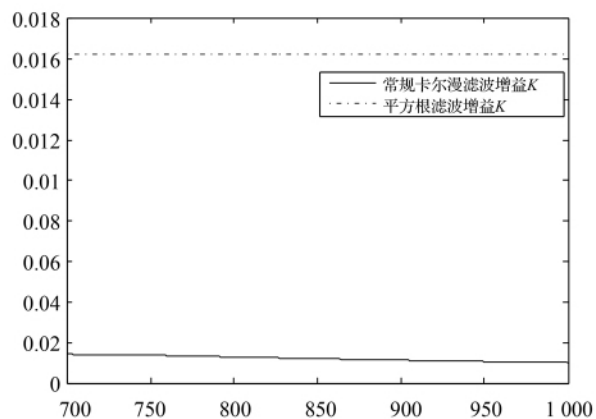


图3 增益矩阵局部比较图
Fig. 3 Local comparison of the gain matrix

具有很好的处理效果,这都是常规 Kalman 滤波所不能达到的。

3 结束语

平方根滤波比常规 Kalman 滤波有较好的仿真效果,

基本上能够用来模拟真实系统的状态。通过病态矩阵模型实例验证了平方根滤波较常规 Kalman 滤波有明显的优越性。同时,通过增益矩阵进一步验证了上述结果。

平方根滤波拥有更高的滤波精度,为火箭、飞机导航系统的设计起着重要作用,此外,还为惯性导航、制导系统、全球定位系统、目标系统、通信与信号过程、金融、电机等软件的开发提供了可靠的工具,为相关领域的科学研究作出了宝贵的贡献。平方根滤波除了可应用在随机最优控制问题和故障诊断等专业领域外,还将促进软件以及仪器市场的发展壮大和新产品的开发。

参考文献:

- [1] 石波. 非线性滤波理论及其在 GPS/INS 组合定位定姿中的应用研究 [D]. 青岛: 山东科技大学博士论文, 2008.
- [2] 秦显平, 杨元喜. 平方根滤波/平滑/双向滤波在 LEO 星载 GPS 定轨中的应用 [J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2009, 34(10): 1 176-1 180.
- [3] 付梦印, 邓志红, 张继伟. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [4] 李晓华, 赵剡, 解春明. 平方根滤波算法在传递对准误差评估中的应用 [J]. 宇航计测技术, 2009, 29(2): 31-34.
- [5] 吴江飞, 黄城. 一种采样型平方根滤波及其应用 [J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(8): 696-698.
- [6] SAYED A H, KAILATH T. A state-space approach to adaptive RLS filtering [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1994, 11(3): 18-60.
- [7] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimator [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.
- [8] Van der Merwe R, Wan E A. IEEE International Conference on Acoustics [J]. IEEE (Speech and Signal Processing - Proceedings), 2001(3): 3 461-3 464.

[编辑: 宋丽茹]

本刊现入编“万方数据——数字化期刊群”和“中国核心期刊(遴选)数据库”,作者著作权使用费与本刊稿酬一次性给付,不再另行发放。作者如不同意将文章入编,投稿时敬请说明。