

对地球大气密度随高度分布规律的讨论

薛大同

(兰州物理研究所,真空低温技术与物理国家级重点实验室 兰州 730000)

Studies of Altitude Distribution of Earth's Atmosphere Density

Xue Datong

(National Key Lab. of vacuum and Cryogenics for Technology and Physics, Lanzhou Institute of Physics, Lanzhou 730000, China)

Abstract The influence of various factors, including the number density of the atmospheric components and the altitude dependence of the gravity acceleration on the Altitude Distribution Rule of the atmosphere density was analytically and experimentally studied, based on the extended version of the Mass Spectrometer Incoherent Scatter model (MSISE-1990) and the experimental data available. Our conclusions are as follows: (i) The experimental results on the basis of MSISE-1990 show that Boltzmann energy distribution is valid only at the altitude ranging from several to tens of kilometers, when the number density of the atmospheric gas phase molecules is considered. (ii) When the variation of the gravity acceleration with altitude is considered, since the integral of the total gas molecule number diverges, its upper radial limit should be within hundreds of times of the radius of the Earth; however, omission of the altitude variations of the gravity acceleration removes the upper limits of the integral. (iii) When variation in the gravity acceleration is considered, there is a discrepancy between the physical and mathematical values of the atmosphere number densities at the infinite height. (iv) The modification made by Da Daoan et. al. succeeded in eliminating the integral divergence and the discrepancy between the physical and mathematical results. In addition, their modified model provides good results in the range of realistic interest.

Keywords Distribution of the atmosphere density with altitude, Atmosphere molecule total amount, Boltzmann energy distribution law, Atmosphere model MSISE-1990

摘要 以 NASA 大气模式 MSISE-1990 为依据,用实例验证的方式证明了关心大气成分的数密度时,玻耳兹曼能量分布律仅适用于几公里至几十公里高度以内的分子态气体。考虑重力加速度随高度变化时,用该分布律得到的无限高处大气数密度在数学形式上不为零,但从物理角度分析其值与零没有差别。忽略重力加速度随高度变化时,用该分布律得到的无限高处大气数密度在数学形式上似乎为零,但无限高处重力加速度应为零,因而不能解决无限高处大气数密度在数学形式上不为零的问题。计算大气分子总数时,积分上限只需数十公里。考虑重力加速度随高度变化时,用该分布律计算大气分子总数的积分发散,因此上限不应超过数百倍地球半径;忽略重力加速度随高度变化时无此限制。达道安等人(宇航学报,2006,27(06):1306-1313)对该分布律导出的大气密度随高度分布所作的修正,不仅在数学形式上解决了无限高处大气数密度不为零的问题和计算大气分子总数的积分发散的问题,而且在有实际意义的范围内与该分布律精密吻合。

关键词 大气密度随高度分布 大气分子总数 玻耳兹曼能量分布律 大气模式 MSISE-1990

中图分类号:P423.6 P424.2 文献标识码:A doi:10.3969/j.issn.1672-7126.2009.增.01

1 由玻耳兹曼能量分布律导出的大气密度随高度分布

1687年牛顿发表了万有引力定律,1859年麦克斯韦导出了平衡态下气体分子的速率分布定律,尔

后,玻耳兹曼发展了麦克斯韦的分子运动学说,证明了在有势的力场中处于热平衡态的分子速度分布定律,即玻耳兹曼能量分布律。麦克斯韦-玻耳兹曼分布律是对相互作用可忽略的大量同类气体分子的集

收稿日期:2008-10-27

* 联系人:Tel:(0931)8265391

合,采用概率统计的方法导出的^[1]。玻耳兹曼能量分布律的表达式为:

$$dN_{v_x, v_y, v_z, x, y, z} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_k + \epsilon_p}{kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz \quad (1)$$

式中: $dN_{v_x, v_y, v_z, x, y, z}$ 为分布在速度区间 $v_x \sim v_x + dv_x$, $v_y \sim v_y + dv_y$, $v_z \sim v_z + dv_z$ 和位置区间 $x \sim x + dx$, $y \sim y + dy$, $z \sim z + dz$ 内的分子数, n_0 为势能 $\epsilon_p = 0$ 处单位体积内所含各种速度的分子数, m 为分子的质量(kg), k 为玻耳兹曼常数, $k = 1.3806 \times 10^{-23}$ J/K, T 为热力学温度, ϵ_k 为分子的动能, ϵ_p 为分子的势能。

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (2)$$

根据万有引力定律,对于地球大气而言,若以地球表面的势能为零,即地球表面分子的数密度 $n_{r_0} = n_0$,则有:

$$\epsilon_p = GMm \int_{r_0}^r \frac{1}{\rho^2} d\rho = GMm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \quad (3)$$

式中: G 为万有引力常数, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, M 为地球质量, $M = 5.975 \times 10^{24} \text{ kg}$, r_0 为地球平均半径, $r_0 = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$, r 为从地球中心到所讨论位置 (x, y, z) 的距离。

将式(2)和式(3)代入式(1),并对速度积分,得到:

$$n_r = \frac{dN_{x, y, z}}{dx dy dz} = n_{r_0} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z \right] e^{\frac{GMm}{kT} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} \quad (4)$$

式中: n_r 为距地球中心 r 处分子的数密度, $n_{r_0} = n_0$, $dN_{x, y, z}$ 为位置区间 $x \sim x + dx$, $y \sim y + dy$, $z \sim z + dz$ 内各种速率的分子数之和。

上式方括号部分的积分可利用误差函数 $\text{erf}(x)$ 得到。我们有:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\zeta^2} d\zeta \quad (5)$$

$$\text{erf}(\infty) = 1 \quad (6)$$

于是:

$$n_r = n_{r_0} e^{\frac{GMm}{kT} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} \quad (7)$$

式(7)即为由玻耳兹曼能量分布律导出的大气密度随高度分布。从式(7)可以看到, n_r 随 r 的增加而减少,呈单调函数;当 r 非常接近 r_0 时,减少得十分缓慢;随着 r 的加大,减少得越来越快。

2 由大气模式得到的大气密度随高度分布

2.1 大气层的温度分布

大气层可以被粗略地表征为环绕地球从海平面到大约 1000km 高度的区域,其间电中性气体可以被检测。50km 以下该大气可以被假定为均匀混合的而且可以被当做一种理想气体。80km 以上该流体静力学平衡因扩散而逐渐崩溃且垂直输运变得重要。在上层大气中主要的气体种类是 N_2 , O , O_2 , H , He 。按温度的垂直分布可将大气层分为:对流层,从海平面直到大约 10km,其间温度逐渐降低;同温层,从 10km 直到大约 45km,其间温度逐渐上升;中间层,从 45km 直到大约 95km,其间温度再次逐渐降低;热层,从 95km 直到大约 400km,其间温度再次逐渐上升;而外逸层,大约在 400km 以上,其间温度是常数。

图 1 给出了对 2000 年 4 月 1 日、世界时 14 时、纬度 0° 、经度 0° 用 NASA 大气模式 MSISE-1990 的执行软件得到的大气温度随高度的变化,图中太阳 F10.7 通量(前一天和三个月平均)和地磁 A_p 指数(一天)是该执行软件利用已存储的 1961 年 1 月至 2006 年 8 月范围内太阳辐射强度和地磁活动指数的变化信息自动给出的。

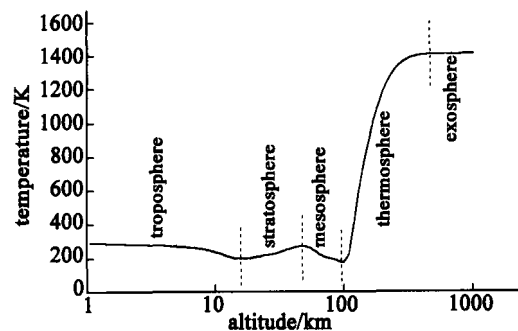


图 1 对 2000 年 4 月 1 日世界时 14 时纬度 0° 经度 0° 用 MSISE-1990 得到的大气温度随高度的变化

Fig.1 Atmospheric temperature versus altitude with MSISE-1990 at universal time 2000-04-01-14: 00, latitude 0 deg., longitude 0 deg.

2.2 现代大气模式

现代,大气密度随高度分布的规律由大气模式给出。自从 1957 年(苏联)人造地球卫星 1 号发射之后,人造卫星的轨道衰减就被用于推出大气数据。第一个上层大气全球模式是由 L.G.Jacchia 在上世纪 60 年代基于理论考虑和卫星阻力数据开发的。

MSISE-1990 模式^[2]是以实测数据为根据的大气

模式,它描述在地球大气中从地面到热层高度的电中性(分子和原子)的温度和密度。72.5km 以下该模式主要以地图手册(Labitzke et al., MAP Handbook, 1985)由 Barnett 和 Corney 提供的区域平均温度和压力表格为基础。20km 以下这些数据用来自美国国家气象中心(NMC)的平均值补充。此外,从 1947 年到 1972 年的皮托管、落球和榴弹探测火箭测量曾被纳入考虑因素。72.5km 以上 MSISE-90 本质上是一个修订了的 MSIS-86 模式,它考虑到源于航天飞机飞行的数据和比较新的不连贯散射结果。

MSIS-86 模式的数据来源包括来自一些火箭、卫星(OGO 6, San Marco 3, AEROS-A, AE-C, AE-D, AE-E, ESRO 4 和 DE 2)和不连贯的散射雷达(Millstone Hill, St. Santin, Arecibo, Jicamarca 和 Malvern)的测量。

随着 1969 年 OGO 6 卫星发射,用质谱仪进行大气参数原位测量成为现实可行的手段。大约在同一时间,地基不连贯散射雷达开始监测热层温度。A. E. Hedin 和他的同事将这两种数据来源结合在一起以建立 Mass Spectrometer Incoherent Scatter(MSIS, 质谱仪不连贯散射)模式:MSIS-77, -83, -86。

大气密度随轨道高度变化并受太阳辐射强度、地磁活动指数、季节、昼夜等因素影响。MSIS 模式要求诸如输入年份、一年第几天、世界时、高度、测地学的纬度和经度、地方视太阳时、太阳 F10.7 通量(前一天和三个月平均)和地磁 A_p 指数(一天或最近 59 小时 A_p 历史)。

该模式计算出下列输出参数:

He, O, N_2 , O_2 , Ar, H 和 N 的数密度,总质量密度;

电中性(分子和原子)的温度和外逸层的温度。

MSISE-1990 模式的执行软件在 1961 年 1 月至 2006 年 8 月范围内由于已存储有太阳辐射强度和地磁活动指数的变化信息,只需提供世界时、星下点经度、星下点纬度、高度等信息即可解算出大气密度。

在 MSISE-1990 模式基础上 NASA 又公布了 NRLMSISE-00 模式 2001^[3],它与 MSISE-1990 的主要差别包括:

(1)在总质量密度上广泛使用阻力和加速度计数据;

(2)对总质量密度增加一个要素以解释在 500km 高度以上 O^+ 和热氧可能重要的贡献;

(3)包含针对 $[O_2]$ 的 SMM UV 掩星数据。

2.3 对 MSISE-1990 模式准确性的旁证

中科院空间科学与应用中心对神舟四号飞船周围大气密度 ρ_a 进行了测量,自主飞行段测量分三个时段进行,其第三时段的实测结果如图 2 所示^[4]。

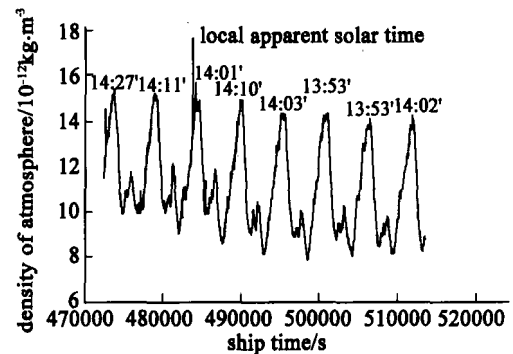


图 2 神舟四号飞船实测的周围大气密度随时间的变化

Fig.2 Actually measured atmosphere density around the spaceship "Shenzhou" No.4 versus time

为了旁证 MSISE-1990 模式的准确性,图 3 给出了用 MSISE-1990 模式的执行软件和含有世界时、星下点经度、星下点纬度、飞行高度等信息的神舟四号星历表得到的飞船周围大气密度随时间的变化。为了便于比较,图中也给出了相应时段中科院空间科学与应用中心的实测结果。

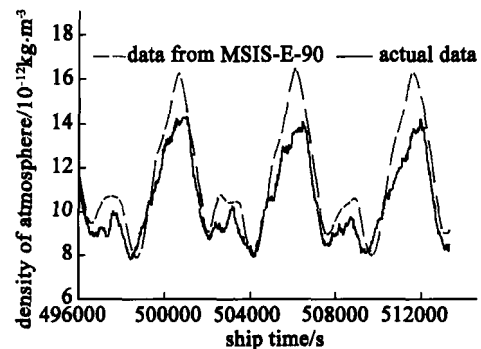


图 3 神舟四号飞船周围大气密度随时间的变化(用 NASA 大气模式 MSISE-1990 和神舟四号星历表得到的数据及中科院空间中心实测数据)

Fig.3 Atmosphere density around the spaceship "Shenzhou" No.4 versus time (with atmosphere model MSISE-1990 and the ephemeris of the spaceship "Shenzhou" No.4 and Actually measured by Center for Space Science and Applied Research, The Chinese Academy of Sciences)

从图 3 可以看到,MSISE-1990 模式的执行软件还是相当准确的。

2.4 大气数密度随高度分布的实例

图 4 给出了对 2000 年 4 月 1 日、世界时 14 时、

纬度 0°、经度 0°用 MSISE-1990 模式的执行软件得到的大气各种成分的数密度随高度的变化。从该图可以看到,该执行软件对所选参数没有给出 O, N, H 在 73km 以下的数密度,原因是 O, N, H 在 73km 以下的数密度随高度降低而急剧减少,同高度下比 N₂, O₂, Ar, He 的数密度低许多量级,因此无法检测。从该图还可以看到, O, N, H 的数密度随高度分布显然不遵循玻耳兹曼能量分布律(本文不研究 O, N, H 的数密度随高度分布的具体规律)。为此,在该图中只给出了用式(7)得到的(即由玻耳兹曼能量分布律导出的)N₂, O₂, He, Ar 的数密度随高度的变化。式(7)中 T, n_{r_0} 用由 MSISE-1990 模式的执行软件得到的零高度的大气温度和零高度大气对应成分的数密度, r_0 用地球赤道平均半径, $r_0 = 6.378 \times 10^6 \text{m}$, 且:

$$r = r_0 + h \quad (8)$$

式中: h 为高度。

$$m = \frac{\mu}{N_A} \quad (9)$$

式中: N_A 为阿伏加德罗常数, $N_A = 6.0220 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$; μ 为气体的摩尔质量, 对 N₂, $\mu = 2.80134 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$; 对 O₂, $\mu = 3.19988 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$; 对 He, $\mu = 4.003 \times 10^{-3} \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$; 对 Ar, $\mu = 3.9948 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ 。

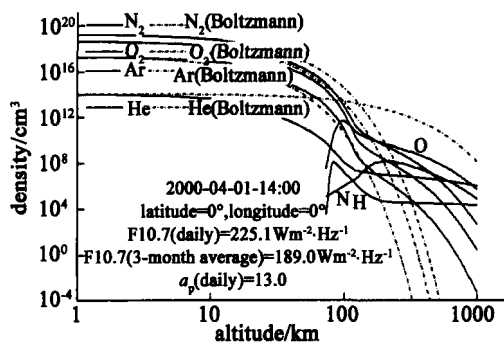


图4 2000年4月1日世界时14时纬度0°经度0°大气各种成分的数密度随高度的变化(用 MSISE-1990 得到和由玻耳兹曼能量分布律导出)

Fig.4 Distributions of Number density of various atmosphere components versus altitude at universal time 2000-04-01-14: 00, latitude 0 deg., longitude 0 deg. (with MSISE-1990 and calculated with Boltzmann energy distribution law)

3 玻耳兹曼能量分布律适用的高度范围

玻耳兹曼能量分布律的适用高度与关心的物理量有关。

3.1 对大气数密度的影响

3.1.1 大气层内

由图4得到 N₂, O₂, He, Ar 由玻耳兹曼能量分布律导出的数密度与用 MSISE-1990 模式得到的数密度的比值。如图5所示。图中还用点划线标出了该比值等于2和0.5两根横线。

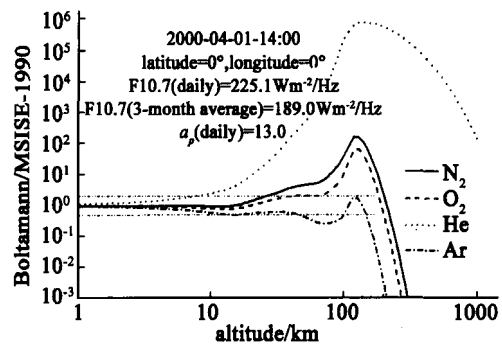


图5 N₂, O₂, He, Ar 由玻耳兹曼能量分布律导出的数密度与用 MSISE-1990 模式得到的数密度的比值随高度的变化

Fig.5 Distributions of the Number density ratio of N₂, O₂, He, Ar versus altitude between calculated with Boltzmann energy distribution law and with MSISE-1990

对照图1和图5可以看到, N₂ 在 26km 以下、O₂ 在 64km 以下、He 在 8km 以下、Ar 在 45km 以下该比值基本上处于 2 和 0.5 两根横线之间。也就是说, 即使把玻耳兹曼能量分布律是否适合计算大气成分数密度的判据放宽到由玻耳兹曼能量分布律导出的数密度与 MSISE-1990 模式得到的数密度相差不超过两倍, 用玻耳兹曼能量分布律计算数密度, 对 O₂ 也只适用于从地面到中间层低端, 对 Ar 只适用于从地面到同温层高端, 对 N₂ 只适用于从地面到同温层低端, 对 He 更只适用于对流层非高端。超过以上高度, 由玻耳兹曼能量分布律导出的数密度迅速偏离 MSISE-1990 模式得到的数密度。

结论是, 关心大气成分的数密度时, 玻耳兹曼能量分布律仅适用于几公里至几十公里高度以内的分子态气体(包括无所谓原子态还是分子态的惰性气体, 但不包括 O, H, N 等原子态气体)。

3.1.2 无限高处

在数学形式上, 由式(7)可以得到距地球中心无限高处分子的数密度 n_{∞} :

$$n_{\infty} = n_{r_0} e^{-\frac{Gm}{r_0 k T}} \quad (10)$$

即:

$$\lg \frac{n_{r_0}}{n_\infty} = \frac{GMm}{r_0 kT} \cdot \frac{1}{\ln 10} \quad (11)$$

从式(10)可以看到,在数学形式上, n_∞ 不为零。然而,例如,以 N_2 为例,分子的质量为 $m_{N_2} = 4.652 \times 10^{-26} \text{kg}$,从图4得到,地面的 N_2 密度为 $1.904 \times 10^{25} \cdot \text{m}^{-3}$ 。考虑到地球赤道(纬度 0°)平均半径 $r_0 =$

$6.378 \times 10^6 \text{m}$,于是由式(11)得到 $\lg \frac{n_{r_0}}{n_\infty} = 304.4949$,

即 $n_\infty = \frac{n_{r_0}}{3.2 \times 10^{304}} = 6.1 \times 10^{-280} \cdot \text{m}^{-3}$ 。我们知道,

人类现在观察到的宇宙深度为 1.5×10^{10} 光年,1 光年等于 $9.4605 \times 10^{17} \text{cm}$,若以该宇宙深度作为球直径计算人类现在观察到的宇宙体积,则上述 n_∞ 值相当于 10^{201} 个宇宙内才有 1 个 N_2 分子。所以,仅仅从式(10)的数学形式上看,距地球中心无限高处分子的数密度不为零,而实际上与零没有差别。

3.2 对累计分子数的影响

大气层内从地面到指定高度的累计分子数为:

$$N_H = \int_0^H 4\pi(r_0 + h)^2 n_h dh \quad (12)$$

式中: H 为指定高度, N_H 为从地面到指定高度的累计分子数, $n_h = n_r$ 。

对图4所示用 MSISE-1990 得到和由玻耳兹曼能量分布律导出的 N_2 、 O_2 、He、Ar 数密度随高度变化,根据式(12)进行数值积分,结果如图6所示。

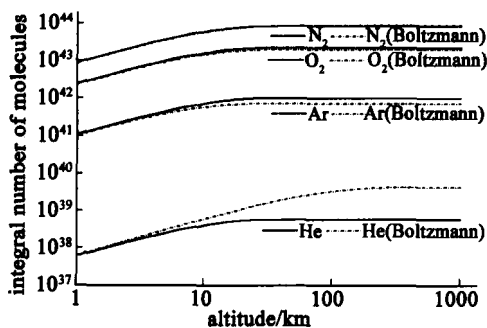


图6 N_2 、 O_2 、He、Ar 从地面到指定高度的累计分子数(用 MSISE-1990 得到和由玻耳兹曼能量分布律导出)

Fig.6 Accumulative molecule count of N_2 、 O_2 、He、Ar from ground to appointed altitude(with MSISE-1990 and with Boltzmann energy distribution law)

如图6所示用 MSISE-1990 得到的 1000 km 高度累计分子数为真实分子总数,即可得到不同高度累计分子数占真实分子总数的百分比,包括用 MSISE-1990 得到和由玻耳兹曼能量分布律导出的结果,

如图7所示。从图7可以看到,积分上限只需定为 31km,此高度下累计分子数已占真实分子总数的 99%。从图7还可以看到,此高度下由玻耳兹曼能量分布律导出的累计分子数占真实分子总数的百分比对 N_2 为 99.7%,对 O_2 为 88.5%,对 He 为 278%,对 Ar 为 71.8%。

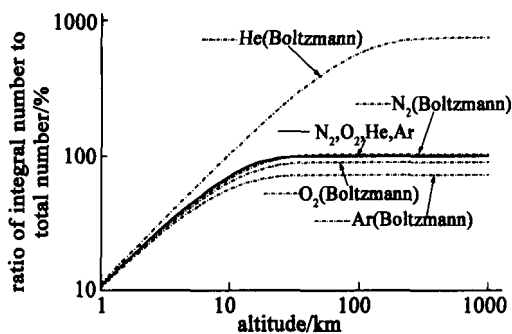


图7 不同高度累计分子数占真实分子总数的百分比(用 MSISE-1990 得到和由玻耳兹曼能量分布律导出)

Fig.7 Percent el to the ratio between the accumulative molecule count and the real total molecule number (with MSISE-1990 and with Boltzmann energy distribution law)

由于积分上限只需定为 31km,而 O, N, H 在 73km 以下的数密度随高度降低而急剧减少,同高度下比 N_2 、 O_2 、Ar、He 的数密度低许多量级,所以不区分气体成分计算总的累计分子数时,完全不需要考虑 O, N, H 的影响。

由于 O, N, H 的数密度随高度分布显然不遵循玻耳兹曼能量分布律,因此单独考虑 O, N, H 从地面到指定高度的累计分子数时,也完全不能使用玻耳兹曼能量分布律。

3.3 对被积函数的影响

$$\text{令:} \quad R = r_0 + H \quad (13)$$

式中: R 为从地球中心到指定高度 H 处的距离。

将式(7)、式(8)和式(13)代入式(12),得到:

$$N_R = 4\pi r_0^2 n_{r_0} \int_{r_0}^R \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 e^{\frac{GMm}{kr} \left(\frac{r_0}{r} - 1\right)} dr \quad (14)$$

式中: $N_R = N_H$ 。

式(14)被积函数 $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 e^{\frac{GMm}{kr} \left(\frac{r_0}{r} - 1\right)}$ 的常用对数(即被积函数的数量级)随 r/r_0 的变化如图8所示。

从图8可以看到,在数学形式上,当 $r \rightarrow \infty$ 时,

式(14)被积函数 $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 e^{\frac{GMm}{kr} \left(\frac{r_0}{r} - 1\right)} \rightarrow \infty$ 。然而,以 N_2 为例,从图8得到,在 $r/r_0 = 351$ 处,被积函数达到极小

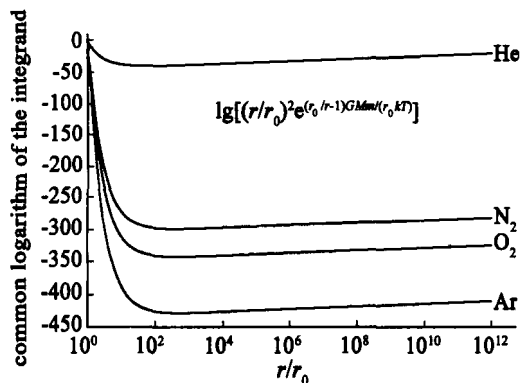


图8 式(14)被积函数的常用对数随 r/r_0 的变化

Fig.8 Logarithm plot of the integrand in formula (14) versus r/r_0

值,为 r_0 处的 2.9×10^{297} 分之一。而从图4得到,地面的 N_2 密度为 $1.904 \times 10^{25} \cdot \text{m}^{-3}$ 。于是,由式(7)得到,对于 N_2 ,在 $r/r_0 = 351$ 处, $n_r = 5.3 \times 10^{-278} \cdot \text{m}^{-3}$ 。考虑到该处的球壳面积仅为 $6.298 \times 10^{19} \text{m}^2$,该处高度仅为 $2.23 \times 10^9 \text{m}$,显然,该处的大气密度实际上与零没有差别。所以, $\int_{r_0}^R \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 e^{\frac{GMm}{kT} \left(\frac{r}{r_0} - 1\right)} dr$ 的积分上限不仅不应趋于无穷大,而且对于 N_2 不应超过 $r/r_0 = 351$ 。

4 对玻耳兹曼能量分布律适用高度的数学处理

4.1 忽略重力加速度随高度变化

如前所述,对于计算大气成分的数密度来说,玻耳兹曼能量分布律仅适用于几公里至几十公里高度以内的分子态气体,由于 $h \ll r_0$,式(3)可以简化为:

$$\epsilon_p \cong mgh \quad (15)$$

其中:

$$g = \frac{GM}{r_0^2} \quad (16)$$

式中: g 为地面的重力加速度。

于是,式(7)可以简化为:

$$n_h \cong n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \quad (17)$$

4.1.1 对无限高处数密度的影响

虽然,式(7)简化为式(17)的条件是 $h \ll r_0$,但从数学形式上由式(17)似乎可以得到距地球中心无限高处分子的数密度 $n_\infty = 0$ 。粗略看来,这好像是解决式(10)在数学形式上 n_∞ 不为零的可行之道。也许,正因为如此,尽管牛顿万有引力定律早在17世纪就发表了,从19世纪玻耳兹曼提出玻耳兹曼能

量分布律直到21世纪的今天,人们还是用式(17)而不是式(7)来表征分子的数密度随高度的变化。然而,重力加速度是随高度变化的,无限高处重力加速度为零,因此,式(17)不仅不能解决数学形式上 n_∞ 不为零的问题,而且偏离 $h \ll r_0$ 越多,式(17)带来的误差越大。

4.1.2 对累计分子数的影响

分别用式(7)和式(17)得到的 N_2 数密度随高度变化代入式(12)进行数值积分,结果如图9所示。

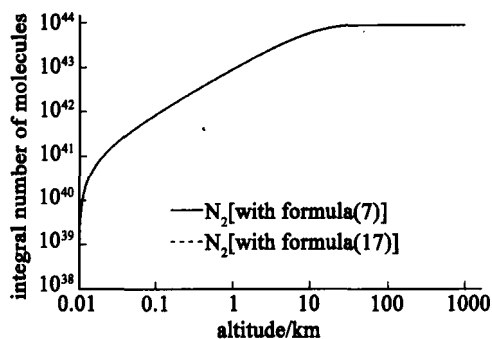


图9 用式(7)或式(17)得到的累计分子数

Fig.9 Accumulative molecule count calculated with formula (7) or (17)

从图8可以看到,一直到1000km高的大气层顶,计算累计分子数时,都可以用式(17)替代式(7)。

4.1.3 对被积函数的影响

将式(17)、式(8)和式(13)代入式(12),得到:

$$N_R = 4\pi r_0^2 n_{r_0} \int_0^R \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 e^{\frac{m g r_0}{kT} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} dr \quad (18)$$

对 N_2 ,式(14)被积函数 $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 e^{\frac{GMm}{kT} \left[\frac{r}{r_0} - 1\right]}$ 和式(18)被积函数 $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 e^{\frac{m g r_0}{kT} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}$ 的常用对数(即被积函数的数

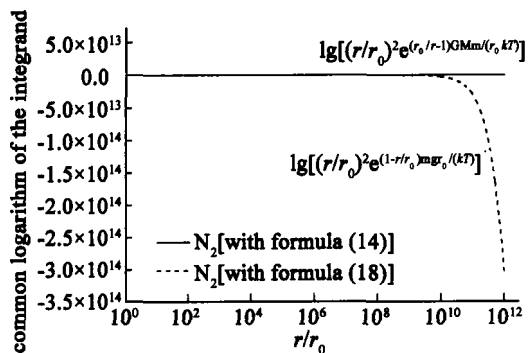


图10(a) 对 N_2 ,式(14)或式(18)被积函数的常用对数随 r/r_0 的变化

Fig.10(a) Logarithm plot of the integrand in formula (14) or (18) versus r/r_0 for N_2

量级)随 r/r_0 的变化如图 10(a)和图 10(b)所示。

从图 10(a)可以看到,当 $r \rightarrow \infty$ 时,式(18)被积函数 $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 e^{\frac{mg_0}{kT}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)} \rightarrow 0$ 。然而,式(18)成立的条件是 $h = r - r_0 \ll r_0$,不应该用于 $r \rightarrow \infty$ 。从图 10(b)也可以看到,当 $r/r_0 = 2$ 时,式(18)被积函数已经比式(14)被积函数小 152 个数量级。

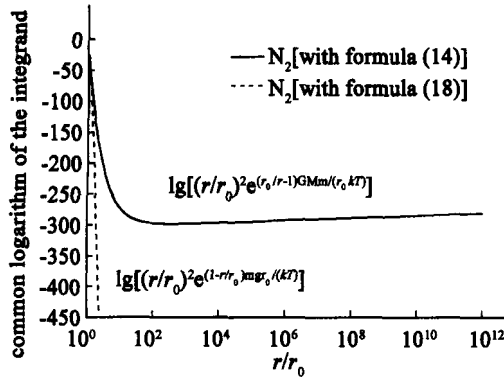


图 10(b) 对 N_2 ,式(14)或式(18)被积函数的常用对数随 r/r_0 的变化(y轴局部放大图)

Fig. 10(b) Logarithm plot of the integrand in formula (14) or (18) versus r/r_0 for N_2 (drawing of partial enlargement along y axis)

4.2 修正玻耳兹曼能量分布律

为此,达道安等^[5]直接对玻耳兹曼能量分布律导出的大气密度随高度分布[式(7)]进行了修正,将式(7)的数学表达式改为:

$$n_r = n_{r_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^4 e^{\frac{GMm}{kT}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \quad (19)$$

4.2.1 对无限高处数密度的影响

从数学形式上由式(19)可以得到距地球中心无限高处分子的数密度 $n_\infty = 0$ 。

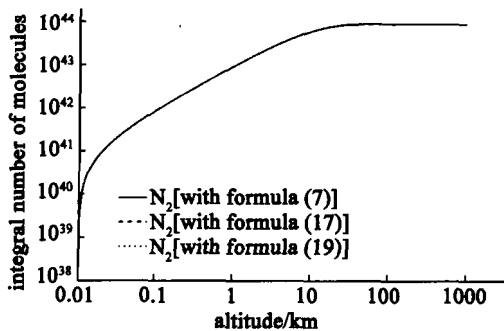


图 11 用式(7)、式(17)或式(19)得到的累计分子数
Fig. 11 Accumulative molecule count with formula (7), (17) or (19)

4.2.2 对累计分子数的影响

分别用式(7)、式(17)和式(19)得到的 N_2 数密度随高度变化代入式(12)进行数值积分,结果如图 11 所示。

从图 11 可以看到,一直到 1000km 高的大气层顶,计算累计分子数时,都可以用式(19)替代式(7)。

4.2.3 对被积函数的影响

将式(19)、式(8)和式(13)代入式(12),得到:

$$N_R = 4\pi r_0^2 n_{r_0} \int_{r_0}^R \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 e^{\frac{GMm}{kT}\left(\frac{r_0}{r}-1\right)} dr \quad (20)$$

对 N_2 ,式(14)被积函数 $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 e^{\frac{GMm}{kT}\left(\frac{r_0}{r}-1\right)}$ 、式(18)被积函数 $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 e^{\frac{mg_0}{kT}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)}$ 和式(20)被积函数 $\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 e^{\frac{GMm}{kT}\left(\frac{r_0}{r}-1\right)}$ 的常用对数(即被积函数的数量级)随 r/r_0 的变化如图 12 所示。

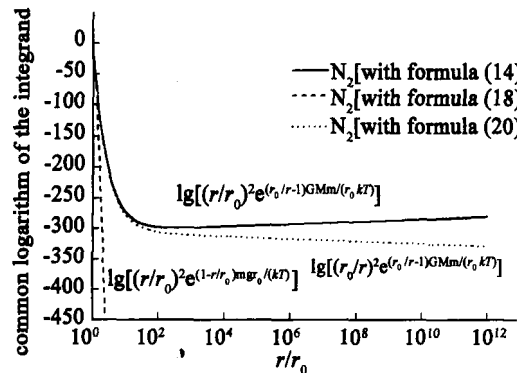


图 12 对 N_2 ,式(14)、式(18)或式(20)被积函数的常用对数随 r/r_0 的变化

Fig. 12 Logarithm plot of the integrand in formula (14), (18) or (20) versus r/r_0 for N_2

从图 12 可以看到,当 $r \rightarrow \infty$ 时,式(20)被积函数 $\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 e^{\frac{GMm}{kT}\left(\frac{r_0}{r}-1\right)} \rightarrow 0$ 。当 $r/r_0 = 2$ 时,式(14)被积函数已经比 $r/r_0 = 1$ 时小 152 个数量级,而此时式(20)被积函数仍与之处于同数量级,为式(14)被积函数的 6.25 分之一。

由此可见,达道安等对玻耳兹曼能量分布律导出的大气密度随高度分布[式(7)]所作的修正,不仅在数学形式上解决了 n_∞ 不为零的问题和积分计算从地面到指定高度的累计分子数时,被积函数发散的问题,而且在有实际意义的范围内与玻耳兹曼能量分布律精密吻合。

今后如果有人能进一步从统计物理的角度对达

道安等提出的修正给予解释,将使该修正的合理性得到证明。

5 结论

(1) *MSISE-1990* 模式以实测数据为根据,得到的大气密度随高度分布是真实可信的。用以计算大气分子总数时,积分上限只需数十公里便足够准确;

(2) 关心大气成分的数密度时,玻耳兹曼能量分布律仅适用于几公里至几十公里高度以内的分子态气体(包括无所谓原子态还是分子态的惰性气体,但不包括 O, H, N 等原子态气体);

(3) 考虑重力加速度随高度变化时,用该分布律得到的无限高处大气数密度在数学形式上不为零,但从物理角度分析其值与零没有差别;忽略重力加速度随高度变化时,用该分布律得到的无限高处大气数密度在数学形式上似乎为零,但无限高处重力加速度应为零,因而不能解决无限高处大气数密度在数学形式上不为零的问题;

(4) 考虑重力加速度随高度变化时,用该分布律计算大气分子总数的积分发散,因此上限不应超过

数百倍地球半径;忽略重力加速度随高度变化时无此限制;(5) 达道安等对该分布律导出的大气密度随高度分布所作的修正不仅在数学形式上解决了无限高处大气数密度不为零的问题和计算大气分子总数的积分发散的问题,而且在有实际意义的范围内与该分布律精密吻合。

参 考 文 献

- [1] 中国大百科全书·天文学卷.北京:中国大百科全书出版社,1980
- [2] Hedin A E. Extension of the MSIS Thermospheric Model into the Middle and Lower Atmosphere. *J. Geophys. Res.* 1991, 96:1159.
- [3] Picone J M, Hedin A E, Drob D P, et al. NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: Statistical comparisons and scientific issues. *J. Geophys. Res.*, 107(A12), 1468, doi: 10.1029/2002JA009430, 2002.
- [4] 薛大同. 航天器准稳态加速度分析. 第五届全国微重力科学学术会议, 2004年7月6-9日, 贵州, 贵阳
- [5] 达道安、杨亚天、涂建辉. 太阳系行星及行星际大气环境特性研究, *宇航学报*, 2006, 27(06): 1306-1313