

中图分类号: TP391.72 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)12-2191-08

论文索引信息: 杭后俊,李汪根. 圆弧标准型有理三次 Bézier 表示的内在性质研究 [J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(12): 2191-2198

# 圆弧标准型有理三次 Bézier 表示的内在性质研究

杭后俊 李汪根

(安徽师范大学数学计算机科学学院, 芜湖 241000)

**摘要:** 给出圆弧带参数的标准型有理三次 Bézier 表示的一种实用形式, 讨论参数对内控制点、两内权因子及肩点的影响。详细分析该参数与圆弧非标准型二次 Bézier 表示下的权因子之间的内在关系, 参数值的变化对应了一个有理线性参数变换。最后讨论了圆弧标准型有理三次 Bézier 表示的反算问题。

**关键词:** 有理 Bézier 曲线; 圆弧表示; 肩点; 权因子; 有理参数变换

## Investigation of inner properties of the standard-form cubic rational Bézier representation of circular arcs

Hang Houjun, Li Wanggen

(School of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

**Abstract:** A practical way of representing circular arcs with standard-form cubic rational Bézier curves containing a parameter is presented. The parameter affecting the control points, weights and shoulder points is discussed. The inner relation between the parameter and the weights of representing circular arcs with nonstandard-form quadratic rational Bézier curves is analyzed in detail. Modifying the parameter value corresponds to a rational linear parameter transformation. Finally, we discuss the inverse calculation of the standard-form cubic rational Bézier representation of circular arcs.

**Keywords:** Rational Bézier curves; representation of circular arcs; shoulder point; weights; rational parameter transformation

## 0 引言

NURBS 方法把二次圆锥曲线和自由曲线的表示统一起来, 通过权因子对曲线(曲面)形状进行灵活调节<sup>[1-5]</sup>, 有效克服了非有理 Bézier 和非有理 B 样条方法的不足。在工程应用中, 常常会遇到将自由曲线和圆锥曲线进行拼接的情况, 因此考虑圆锥曲线尤其是圆弧的标准型有理高次 Bézier 表示的问题具有实际意义。王国瑾等人<sup>[6]</sup>、秦开怀等人<sup>[7]</sup>详细讨论了中心角为  $0 < \theta < 4\pi/3$  的圆弧, 指出同一

圆弧可有无限多种有理三次 Bézier 表示, 并给出了两内 Bézier 点的具体构造方法, 给出的计算公式是由圆弧上点  $s$  的  $x, y$  坐标来表示。李强等人<sup>[8]</sup>在已知 3 个型值点的条件下, 直接给出在标准型下由型值点坐标表示的两内顶点及其权因子公式, 从而得到圆弧曲线。但上述方法给出的在标准型下两内顶点及其权因子计算公式的意义不明显, 很难看出在同一圆弧不同的标准型有理三次 Bézier 表示下两内权因子、两内顶点之间的内在关系以及肩点的位置是如何变化的等。刘书等人<sup>[9]</sup>在文献<sup>[6]</sup>的基础上研究了常用三次/四次圆弧有理 Bézier 表示的参数

收稿日期: 2010-11-12; 修回日期: 2011-03-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(61070060)。

第一作者简介: 杭后俊(1965—), 男, 副教授。主要研究方向为计算机图形学和 CAGD 等。E-mail: hjhang@mail.ahnu.edu.cn。

化问题,给出了参数正算和反算的几何解法,给出了适合应用的圆弧有理三次、四次 Bézier 表示的计算参数,其中参数反算使用了二分几何搜索算法。胡倩倩等人<sup>[10]</sup>则进一步讨论了有理圆锥曲线段参数的几何意义,用代数和几何方法得到用有理三次 Bézier 曲线表示的圆锥曲线上的点与其参数域上的点所对应的函数关系等。我们知道,对同一圆弧,既可以由改变其非标准型有理二次 Bézier 表示下的首末权因子之比来改变圆弧的参数化状况,也可以由改变圆弧的标准型有理三次 Bézier 表示下的两内顶点及其权因子来改变其参数化状况,那么这两者之间存在什么关系呢?同一圆弧不同的标准型有理三次 Bézier 表示之间存在什么关系?与一个怎样的有理线性变换相联系?等等问题,文献[9-10]并没有解决。

本文深入讨论圆弧标准型有理三次 Bézier 表示的内在性质。首先,给出圆弧一个带参数  $\lambda$  的标准型有理三次 Bézier 实用表示,让  $\lambda$  在一定范围内变化,就可以得到同一圆弧不同的标准型有理三次 Bézier 表示,揭示了在同一圆弧不同的标准型有理三次 Bézier 表示下两内权因子、两内顶点之间的内在关系以及肩点位置变化规律。其次,找到参数  $\lambda$  与圆弧非标准型二次有理 Bézier 表示下的权因子之间的关系式,将同一圆弧不同的标准型有理三次 Bézier 表示之间的关系与一个有理线性参数变换联系起来。最后,讨论两种反算问题:已知圆弧的标准型有理三次 Bézier 表示,反求圆弧上一点的参数值;给定圆弧上一点的参数值,反求对应的标准型有理三次 Bézier 表示,并给出具体的应用实例。

### 1 标准型有理三次 Bézier 曲线表示圆弧的一种实用方法

对圆弧标准型有理三次 Bézier 表示进行详细研究,得到一种实用的表示形式。

设  $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2$  为圆弧(中心角为  $0 < \theta < 4\pi/3$ )有理二次 Bézier 表示下的控制点,则可以用如下带参数的标准型有理三次 Bézier 方程表示圆弧。

$$P(u) = \frac{\sum_{j=0}^3 \omega_j b_j^* B_{j,3}(u)}{\sum_{j=0}^3 \omega_j B_{j,3}(u)} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1)$$

式中  $b_0^* = \bar{b}_0, b_3^* = \bar{b}_2, \omega_0 = \omega_3 = 1,$

$$b_1^* = \frac{[1 + 2\lambda \cos \frac{\theta}{2} (1 + 2\cos \frac{\theta}{2})] \bar{b}_0}{1 + 2\cos \frac{\theta}{2}} + \frac{[2\cos \frac{\theta}{2} - 2\lambda \cos \frac{\theta}{2} (1 + 2\cos \frac{\theta}{2})] \bar{b}_1}{1 + 2\cos \frac{\theta}{2}}$$

$$b_2^* = \frac{(1 - \lambda(1 + 2\cos \frac{\theta}{2})) \bar{b}_2}{(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}) [1 - \lambda(1 - 4\cos^2 \frac{\theta}{2})]} + \frac{(2\cos \frac{\theta}{2} + 4\lambda \cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + 2\cos \frac{\theta}{2})) \bar{b}_1}{(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}) [1 - \lambda(1 - 4\cos^2 \frac{\theta}{2})]}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{3} \frac{1 + 2\cos \frac{\theta}{2}}{1 - \lambda(1 + 2\cos \frac{\theta}{2})} \times \sqrt[3]{\frac{1 - \lambda(1 + 2\cos \frac{\theta}{2})}{1 + 2\lambda \cos \frac{\theta}{2} (1 + 2\cos \frac{\theta}{2})}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{3} \frac{(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}) [1 - \lambda(1 - 4\cos^2 \frac{\theta}{2})]}{1 + 2\lambda \cos \frac{\theta}{2} (1 + 2\cos \frac{\theta}{2})} \times \sqrt[3]{\frac{1 + 2\lambda \cos \frac{\theta}{2} (1 + 2\cos \frac{\theta}{2})}{1 - \lambda(1 + 2\cos \frac{\theta}{2})}}$$

$$\lambda \in \begin{cases} \left( -\frac{1}{2\cos \frac{\theta}{2} (1 + 2\cos \frac{\theta}{2})}, \frac{1}{1 + 2\cos \frac{\theta}{2}} \right) & 0 < \theta < \pi \\ \left( -\infty, \frac{1}{1 - 4\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) & \pi \leq \theta < \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

需要指出的是,当  $\theta = \pi$  时,内顶点  $\bar{b}_1$  在无穷远处,可以通过引入一个垂直于  $\bar{b}_2 - \bar{b}_0$ , 模长等于半径的方向向量  $b$ , 方向向量  $b$  可以看做内顶点  $\bar{b}_1$  在无穷远处时  $(\bar{b}_1 - \bar{b}_0) \cos \frac{\theta}{2}$  或  $(\bar{b}_1 - \bar{b}_2) \cos \frac{\theta}{2}$  的极限,即

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} (\bar{b}_1 - \bar{b}_0) \cos \frac{\theta}{2} = b \text{ 或 } \lim_{\theta \rightarrow \pi} (\bar{b}_1 - \bar{b}_2) \cos \frac{\theta}{2} = b$$

对式(1)两边取上述极限即得  $\theta = \pi$  圆弧的两内控制点及内权因子

$$\begin{aligned}
 b_1^* &= \bar{b}_0 + 2(1-\lambda)b, \\
 b_2^* &= \bar{b}_2 + \frac{2}{1-\lambda}b \\
 \omega_1 &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-\lambda)^2}} \\
 \omega_2 &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{(-\lambda)^2} \quad -\infty < \lambda < 1
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

如图 1 所示。

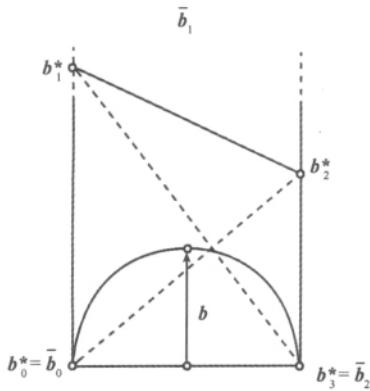


图 1  $\theta = \pi$  圆弧的有理三次 Bézier 表示

Fig.1  $\theta = \pi$  circular arcs from cubic rational Bézier curves

考察由控制点  $b_0(0, \rho)$   $b_1(1, \sqrt{3})$   $b_2(2, \rho)$  , 内权因子等于  $\cos \frac{\pi}{3}$  所定义的标准型有理二次 Bézier 曲线,它是中心角等于  $\frac{2\pi}{3}$  的圆弧。由式(1)可求出其带参数的标准型有理三次 Bézier 表示下的控制点及权因子为

$$\begin{aligned}
 b_0^* &= b_0, b_1^* = \frac{(1+2\lambda)b_0 + (1-2\lambda)b_1}{2}, \\
 b_2^* &= \frac{(1-2\lambda)b_2 + (1+2\lambda)b_1}{2}, b_3^* = b_2; \\
 \omega_0 &= \omega_3 = 1, \omega_1 = \frac{2}{3(1-2\lambda)}\sqrt[3]{\frac{1-2\lambda}{1+2\lambda}}, \\
 \omega_2 &= \frac{2}{3(1+2\lambda)}\sqrt[3]{\frac{1+2\lambda}{1-2\lambda}} \quad \lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).
 \end{aligned}$$

图 2 为  $\lambda$  分别取  $-0.3, -0.25, 0, 0.2, 0.4$  时对应的控制点位置和肩点位置。表 1 为相应的控制点位置、权因子的值以及肩点的变化情况。

考察由控制点  $b_0(0, \rho)$   $b_2(2, \rho)$  和方向向量  $b = \{0, 1\}$  定义的半圆弧。由式(2)可求出其带参数的标准型有理三次 Bézier 表示下的控制点及权因子为

$$\begin{aligned}
 b_0^* &= b_0, b_1^* = b_0 + 2(1-\lambda)b, \\
 b_2^* &= b_2 + \frac{2}{1-\lambda}b, b_3^* = b_2; \\
 \omega_0 &= \omega_3 = 1, \omega_1 = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-\lambda)^2}}, \\
 \omega_2 &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{(1-\lambda)^2} \quad \lambda \in (-\infty, 1).
 \end{aligned}$$

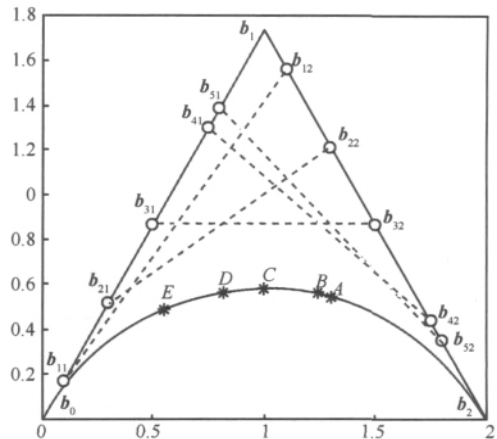


图 2 参数  $\lambda$  的一组值对应的控制点及肩点位置(1)

Fig.2 Control points and shoulder point that correspond to a set of  $\lambda$  (1)

表 1 参数  $\lambda$  对控制点、权因子以及肩点的影响(1)

Tab.1 Parameter affecting the control points, weights and shoulder point(1)

	控制点	权因子	肩点
$\lambda = -0.3$	$b_0, b_{51}, b_{52}, b_2$	$\omega_1 = 0.6614$ $\omega_2 = 1.0499$	A(1.2976, 0.5383)
$\lambda = -0.25$	$b_0, b_{41}, b_{42}, b_2$	$\omega_1 = 0.6410$ $\omega_2 = 0.9245$	B(1.2388, 0.5524)
$\lambda = 0$	$b_0, b_{31}, b_{32}, b_2$	$\omega_1 = 0.6667$ $\omega_2 = 0.6667$	C(1.0, 0.5774)
$\lambda = 0.2$	$b_0, b_{21}, b_{22}, b_2$	$\omega_1 = 0.8377$ $\omega_2 = 0.6316$	D(0.8142, 0.5623)
$\lambda = 0.4$	$b_0, b_{11}, b_{12}, b_2$	$\omega_1 = 1.6025$ $\omega_2 = 0.7704$	E(0.5509, 0.4864)

图 3 为  $\lambda$  分别取  $-0.45, -0.25, 0, 0.2, 0.3$  时对应的控制点位置和肩点位置。表 2 为相应的控制点位置、权因子的值以及肩点的变化情况。

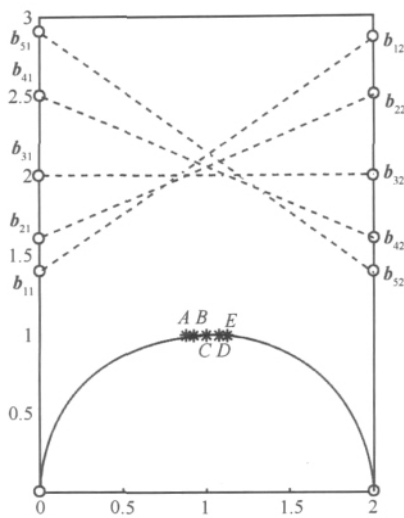


图 3  $\lambda$  的一组值对应半圆弧的控制点及肩点位置(2)

Fig.3 Control points and shoulder point that correspond to a set of  $\lambda$  (2)

表 2 参数  $\lambda$  对控制点、权因子以及肩点的影响(2)

Tab.2 Parameter affecting the control points, weights and shoulder point(2)

控制点	权因子	肩点
$\lambda = -0.45$ $b_0$ $b_{51}$ $b_{52}$ $b_2$	$\omega_1 = 0.260\ 2$ $\omega_2 = 0.427\ 0$	$E(1.123\ 2\ \rho.992\ 4)$
$\lambda = -0.25$ $b_0$ $b_{41}$ $b_{42}$ $b_2$	$\omega_1 = 0.287\ 3$ $\omega_2 = 0.386\ 8$	$D(1.074\ 2\ \rho.997\ 2)$
$\lambda = 0$ $b_0$ $b_{31}$ $b_{32}$ $b_2$	$\omega_1 = 0.333\ 3$ $\omega_2 = 0.333\ 3$	$C(1\ 1)$
$\lambda = 0.2$ $b_0$ $b_{21}$ $b_{22}$ $b_2$	$\omega_1 = 0.386\ 8$ $\omega_2 = 0.287\ 3$	$B(0.925\ 8\ \rho.997\ 2)$
$\lambda = 0.3$ $b_0$ $b_{11}$ $b_{12}$ $b_2$	$\omega_1 = 0.422\ 8$ $\omega_2 = 0.262\ 8$	$A(0.881\ 7\ \rho.993\ 0)$

圆弧带参数的标准型有理三次 Bézier 曲线表示具有以下基本性质:

1) 当  $\lambda = 0$  时,即为标准型有理二次 Bézier 表示下对带权控制顶点

$$\bar{B}_0 = [\bar{b}_0, 1] \quad \bar{B}_1 = [\bar{b}_1 \cos \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}] \quad \bar{B}_2 = [\bar{b}_2, 1]$$

按非有理 Bézier 曲线的升阶公式进行升阶后所得 4 带权控制顶点在  $\omega = 1$  平面上的投影所得的标准型有理三次 Bézier 表示。

2) 当  $\lambda$  的取值越接近  $\frac{1}{1 + 2\cos \frac{\theta}{2}}$  (当  $0 < \theta < \pi$

时) 或  $\frac{1}{1 - 4\cos^2 \frac{\theta}{2}}$  (当  $\pi < \theta < 4\pi/3$  时), 控制点

$b_1^*$  越靠近  $\bar{b}_0$ ,  $b_2^*$  就越靠近  $\bar{b}_1$ ; 当  $\lambda$  的取值越接近

$$-\frac{1}{2\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)} \quad \left(\text{当 } 0 < \theta < \pi \text{ 时}\right) \text{ 或 } -\infty$$

(当  $\pi < \theta < 4\pi/3$  时) 控制点  $b_2^*$  越靠近  $\bar{b}_2$ ,  $b_1^*$  就越靠近  $\bar{b}_1$ 。

3)  $\omega_1$  在区间  $\left(-\frac{1}{2\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}, \right.$

$$\left. -\frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{3\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}\right) \quad \left(\text{当 } 0 < \theta < \pi \text{ 时}\right) \text{ 或}$$

$$\left(-\infty, -\frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{3\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}\right) \quad \left(\text{当 } \pi < \theta < 4\pi/3 \text{ 时}\right)$$

时) 上严格单减; 在区间  $\left[-\frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{3\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}, \right.$

$$\left. \frac{1}{1 + 2\cos \frac{\theta}{2}}\right) \quad \left(\text{当 } 0 < \theta < \pi \text{ 时}\right) \text{ 或}$$

$$\left[-\frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{3\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}, \frac{1}{1 - 4\cos^2 \frac{\theta}{2}}\right) \quad \left(\text{当 } \pi <$$

$\theta < 4\pi/3$  时) 上严格单增; 在  $\lambda_0 =$

$$-\frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{3\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)} \text{ 时取得最小值 } \cos^{\frac{2}{3}} \frac{\theta}{2}。$$

4)  $\omega_2$  在区间  $\left(-\frac{1}{2\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}, \right.$

$$\left. \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{\left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right) \left(1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)}\right) \quad \left(\text{当 } 0 < \theta < \pi \text{ 时}\right) \text{ 或}$$

$$\left(-\infty, \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{\left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right) \left(1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)}\right) \quad \left(\text{当 } \pi < \theta <$$

$4\pi/3$  时) 上严格单减; 在区间

$$\left[ \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{\left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)\left(1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)}, \frac{1}{1 + 2\cos \frac{\theta}{2}} \right] \quad \text{当}$$

$$0 < \theta < \pi \text{ 时) 或 } \left[ \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{\left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)\left(1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)}, \frac{1}{1 - 4\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right] \quad \text{(当 } \pi < \theta < 4\pi/3 \text{ 时) 上严格单增; 在}$$

$$\lambda_0 = \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{\left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)\left(1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)} \text{ 时取得最小值}$$

$$\cos^{\frac{2}{3}} \frac{\theta}{2} \text{。}$$

5) 当  $\theta = \pi$  时,  $\omega_1$  是  $\lambda$  的单增函数,  $\omega_2$  是  $\lambda$  的单减函数。

6) 当  $0 < \theta < 4\pi/3$  但  $\theta \neq \pi$  时,  $\lambda$  的取值越大, 此时尽管  $\omega_1, \omega_2$  都越来越大, 但增长的速度不同,  $\omega_1 \ll \omega_2$ ; 当  $\lambda$  的取值越小, 此时尽管  $\omega_1, \omega_2$  都越来越大, 但增长的速度不同,  $\omega_2 \gg \omega_1$ 。图 4 是  $\theta = 2/3\pi$  时  $\omega_1, \omega_2$  的比值曲线图, 其中实线为  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  曲线图, 虚线为  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  曲线图。

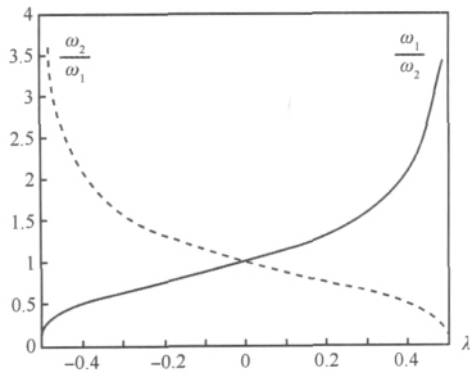


图 4 两内权因子比值曲线图 ( $\theta = 2/3\pi$ )  
Fig. 4 Ratio curves of inner weights ( $\theta = 2/3\pi$ )

## 2 $\lambda$ 值的变化对应有理线性参数变换

分两种情况来讨论。

1) 当  $0 < \theta < 4\pi/3$  但  $\theta \neq \pi$  时, 设圆弧的非标准型有理二次 Bézier 表示为

$$p(u) = \frac{\sum_{j=0}^2 \bar{\omega}_j \bar{b}_j B_{j,2}(u)}{\sum_{j=0}^2 \bar{\omega}_j B_{j,2}(u)} \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$\text{令 } \frac{\sum_{j=0}^2 \bar{\omega}_j \bar{b}_j B_{j,2}(u)}{\sum_{j=0}^2 \bar{\omega}_j B_{j,2}(u)} = \frac{\sum_{j=0}^3 \omega_j b_j^* B_{j,3}(u)}{\sum_{j=0}^3 \omega_j B_{j,3}(u)}$$

即

$$\sum_{j=0}^2 \bar{\omega}_j \bar{b}_j B_{j,2}(u) \cdot \sum_{j=0}^3 \omega_j B_{j,3}(u) = \sum_{j=0}^3 \omega_j b_j^* B_{j,3}(u) \cdot \sum_{j=0}^2 \bar{\omega}_j B_{j,2}(u)$$

比较等式两边  $u^i (1-u)^{5-i}$  的系数可得

$$\left( 2\bar{\omega}_1 - 3 \frac{2\cos \frac{\theta}{2} - 2\lambda \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}{1 + 2\cos \frac{\theta}{2}} \bar{\omega}_0 \omega_1 \right) \times$$

$$(\bar{b}_1 - \bar{b}_0) = 0$$

$$\left( 2\bar{\omega}_1 - 3 \frac{2\cos \frac{\theta}{2} + 4\lambda \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \lambda \left(1 - 4\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)\right]} \bar{\omega}_2 \omega_2 \right) \times$$

$$(\bar{b}_1 - \bar{b}_2) = 0$$

于是

$$2\bar{\omega}_1 - 3 \frac{2\cos \frac{\theta}{2} - 2\lambda \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}{1 + 2\cos \frac{\theta}{2}} \bar{\omega}_0 \omega_1 = 0$$

$$2\bar{\omega}_1 - 3 \frac{2\cos \frac{\theta}{2} + 4\lambda \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \lambda \left(1 - 4\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)\right]} \bar{\omega}_2 \omega_2 = 0$$

解得

$$\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_0} = \cos \frac{\theta}{2} \times \sqrt[3]{\frac{1 - \lambda \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}{1 + 2\lambda \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}} \quad (3)$$

$$\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2} = \cos \frac{\theta}{2} \times \sqrt[3]{\frac{1 + 2\lambda \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}{1 - \lambda \left(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}\right)}} \quad (4)$$

2) 当  $\theta = \pi$  时, 设圆弧的非标准型有理二次

Bézier 表示为

$$p(u) = \frac{(1-u)^2 \bar{\omega}_0 \bar{b}_0 + u^2 \bar{\omega}_2 \bar{b}_2}{(1-u)^2 \bar{\omega}_0 + u^2 \bar{\omega}_2} + \frac{2u(1-u)}{(1-u)^2 \bar{\omega}_0 + u^2 \bar{\omega}_2} \bar{b} \quad 0 \leq u \leq 1$$

标准型有理三次 Bézier 表示为

$$p(u) = \frac{\sum_{j=0}^3 \omega_j b_j^* B_{j,3}(u)}{\sum_{j=0}^3 \omega_j B_{j,3}(u)} \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$b_1^* = \bar{b}_0 + 2(1-\lambda)b, \quad b_2^* = \bar{b}_2 + \frac{2}{1-\lambda}b$$

$$\omega_1 = \frac{1}{3 \sqrt[3]{(1-\lambda)^2}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{3} \sqrt[3]{(1-\lambda)^2}$$

$$-\infty < \lambda < 1$$

令

$$\frac{(1-u)^2 \bar{\omega}_0 \bar{b}_0 + u^2 \bar{\omega}_2 \bar{b}_2}{(1-u)^2 \bar{\omega}_0 + u^2 \bar{\omega}_2} + \frac{2u(1-u)}{(1-u)^2 \bar{\omega}_0 + u^2 \bar{\omega}_2} \bar{b} = \frac{\sum_{j=0}^3 \omega_j b_j^* B_{j,3}(u)}{\sum_{j=0}^3 \omega_j B_{j,3}(u)}$$

比较等式两边  $u^i(1-u)^{5-i}$  的系数可求得

$$\bar{\omega}_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\lambda}} \quad \bar{\omega}_2 = \sqrt[3]{1-\lambda} \quad (5)$$

而  $\bar{\omega}_1 = 0$ 。

式(3)一式(5)表示圆弧标准型有理三次 Bézier 表示下的参数  $\lambda$  与非标准型有理二次 Bézier 表示下的权因子之间的关系式。这样,只要给定圆弧的一个标准型有理三次 Bézier 表示,我们就能得到与其具有相同参数化效果的非标准型有理二次 Bézier 表示,反之亦然。

设由圆弧标准型有理三次 Bézier 表示下  $\lambda$  的两个值  $\lambda_1, \lambda_2$  求出非标准型有理二次 Bézier 表示下的两组权因子分别为  $\bar{\omega}_0^1, \bar{\omega}_1^1, \bar{\omega}_2^1$  和  $\bar{\omega}_0^2, \bar{\omega}_1^2, \bar{\omega}_2^2$ 。由文献[1]知,存在与权因子变化有相同参数化效果的有理线性参数变换

$$u = \frac{\bar{u}}{\sqrt{\frac{\bar{\omega}_2^1 \bar{\omega}_0^2}{\bar{\omega}_0^1 \bar{\omega}_2^2} (1-\bar{u}) + \bar{u}}}$$

换成  $\lambda_1, \lambda_2$  表示即为

$$u = \frac{\bar{u}}{\Delta(1-\bar{u}) + \bar{u}} \quad (6)$$

式中

$$\Delta =$$

$$\sqrt[3]{\frac{[1-\lambda_1(1+2\cos\frac{\theta}{2})][1+2\lambda_2\cos\frac{\theta}{2}(1+2\cos\frac{\theta}{2})]}{[1+2\lambda_1\cos\frac{\theta}{2}(1+2\cos\frac{\theta}{2})][1-\lambda_2(1+2\cos\frac{\theta}{2})]}}$$

式中,  $u$  为  $\lambda = \lambda_1$  时标准型有理三次 Bézier 表示下的参数,  $\bar{u}$  为  $\lambda = \lambda_2$  时标准型有理三次 Bézier 表示下的参数。需要说明的是,式(6)对  $\theta = \pi$  情形也同样适用。

至此,得出一个重要结论,  $\lambda$  值的变化对应有理线性参数变换。 $\lambda$  的值由  $\lambda_1$  变为  $\lambda_2$ , 由式(6)可以求出对圆弧 ( $0 < \theta < 4\pi/3$ ) 上点的参数化状况有同样影响的有理线性参数变换。

### 3 反算过程

#### 3.1 给定圆弧上一点的参数值,反求对应的标准型有理三次 Bézier 表示

由前面的讨论可知,在圆弧标准型有理三次 Bézier 表示式(1)下,通过调节参数  $\lambda$  的值,不仅可以改变两内顶点的位置和两内权因子的值,而且也改变了肩点的位置,实际上改变了圆弧上的点与参数域内点的对应关系,即具有不同的参数化效果。

已知圆弧上一点  $p$  在圆弧标准型有理三次 Bézier 表示下的参数值为  $\bar{u}$ , 求对应的标准型有理三次 Bézier 表示。这是一个反算过程。

当  $\lambda = 0$  时,即为标准型有理二次 Bézier 表示下对带权控制顶点按非有理 Bézier 曲线的升阶公式进行升阶后所得 4 带权控制顶点在  $\omega = 1$  平面上的投影所得的标准型有理三次 Bézier 表示。此时  $p$  的

参数  $u = \frac{\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}}$ , 其中,  $\mu = \frac{\bar{b}_0 m}{m \bar{b}_2}$ 。如图 5 所示。

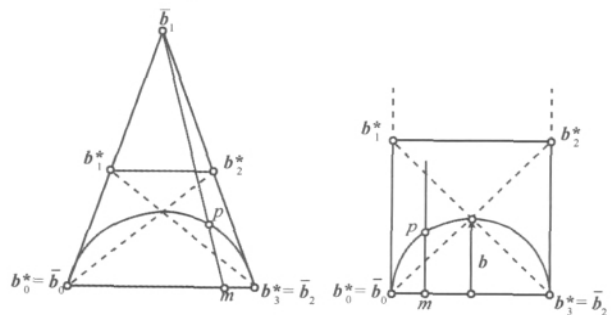


图 5 反求圆弧上点  $p$  的参数值 ( $\lambda = 0$ )

Fig.5 Calculating inversely parameter value of  $p$  ( $\lambda = 0$ )

将  $u = \frac{\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}}$ ,  $\lambda_1 = 0$  及  $\bar{u}$  代入式(6)可求得

$$\lambda^* = \frac{1 - \mu \sqrt{\mu} (\frac{1}{u} - 1)^3}{(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}) (1 + 2\mu \sqrt{\mu} (\frac{1}{u} - 1)^3 \cos \frac{\theta}{2})} \quad (7)$$

再将  $\lambda^*$  代入式(1) 即得  $p$  点以  $\bar{u}$  为参数值时圆弧的标准型有理三次 Bézier 表示。

特别地 1) 当  $\theta = \pi$  时, 式(7) 变为

$$\lambda^* = 1 - \mu \sqrt{\mu} (\frac{1}{u} - 1)^3 \quad (8)$$

2) 当  $\bar{u} = \frac{1}{2}$  时, 即  $p$  是圆弧标准型有理三次 Bézier 表示下的肩点时

$$\lambda^* = \frac{1 - \mu \sqrt{\mu}}{(1 + 2\cos \frac{\theta}{2}) (1 + 2\mu \sqrt{\mu} \cos \frac{\theta}{2})} \quad (9)$$

### 3.2 已知圆弧标准型有理三次 Bézier 表示, 反求圆弧上一点的参数值

已知圆弧的一个标准型有理三次 Bézier 表示 ( $\lambda = \lambda^*$ ) 求圆弧上一点  $p$  的参数值  $\bar{u}$ 。这是另一个反算过程。

将  $u = \frac{\sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\mu}}$ ,  $\lambda_1 = 0$  及  $\lambda_2 = \lambda^*$  代入式(6)

可求得  $\bar{u} =$

$$\sqrt[3]{\frac{\mu \sqrt{\mu} (1 + 2\lambda^* \cos \frac{\theta}{2}) (1 + 2\cos \frac{\theta}{2})}{1 - \lambda \lambda^* (1 + 2\cos \frac{\theta}{2})}} \sqrt[3]{\frac{\mu \sqrt{\mu} (1 + 2\lambda^* \cos \frac{\theta}{2}) (1 + 2\cos \frac{\theta}{2})}{1 - \lambda^* (1 + 2\cos \frac{\theta}{2})}} + 1 \quad (10)$$

特别地, 当  $\theta = \pi$  时

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1 - \lambda^*}{\mu \sqrt{\mu}}} + 1} \quad (11)$$

## 4 实例分析

考察第 1 象限内圆心位于原点的  $90^\circ$  单位圆, 其有理二次 Bézier 表示下的控制点为  $\bar{b}_0(1, 0)$ ,  $\bar{b}_1(1, 1)$ ,  $\bar{b}_2(0, 1)$ 。1) 求其上点  $p(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  作为肩点时的  $\lambda$  值以及圆弧的标准型有理三次 Bézier 表示。2) 点  $p^*(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  在此表示下的参数值。

延长  $\overline{b_1 p}$  交  $\overline{b_0 b_2}$  于点  $m$ , 可求得  $m$  的坐标为  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $\mu = \frac{\overline{b_0 m}}{m \overline{b_2}} = 2$ , 代入式(9) 求得  $\lambda^* = \frac{1}{5}(3\sqrt{2} - 5)$ 。将  $\lambda^*$  代入式(1) 即得以  $p$  点为肩点时圆弧的标准型有理三次 Bézier 表示, 控制点及权因子分别为  $b_0^* = \bar{b}_0$ ,  $b_3^* = \bar{b}_2$ ,  $b_1^* = \frac{1}{5}(\bar{b}_0 + 4\bar{b}_1)$ ,  $b_2^* = \frac{1}{3}(2\bar{b}_2 + \bar{b}_1)$ ;  $\omega_0 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ ,  $\omega_1 = \frac{5}{6}$ 。

可以将  $\lambda^* = \frac{1}{5}(3\sqrt{2} - 5)$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  代入式(3)(4) 中求得圆弧的有理二次 Bézier 表示下的权因子

$$\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_0} = 1, \quad \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2} = \frac{1}{2}$$

一般地, 取  $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_1 = 1$ ,  $\bar{\omega}_2 = 2$ 。如图 6 所示。

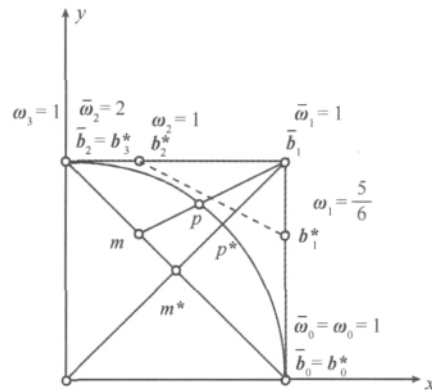


图 6 反求圆弧标准型有理三次 Bézier 表示 ( $\theta = \pi/2$ )  
Fig. 6 Finding inversely the standard-form cubic rational Bézier representation of circular arcs point ( $\theta = \pi/2$ )

下面求  $p^*(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  在此表示下的参数值。延长  $\overline{b_1 p^*}$  交  $\overline{b_0 b_2}$  于点  $m^*$ , 容易求得  $\mu = \frac{\overline{b_0 m^*}}{m^* \overline{b_2}} = 1$ , 将  $\mu = 1$ ,  $\lambda^* = \frac{1}{5}(3\sqrt{2} - 5)$  代入式(10) 求得点  $p^*(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  的参数值  $\bar{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 。  
考察由控制点  $\bar{b}_0(0, 0)$ ,  $\bar{b}_2(2, 0)$  和方向向量  $b = \{0, 1\}$  所定义的半圆弧。1) 求该半圆弧的一个标准型有理三次 Bézier 表示, 使得其上点  $p(1, 1)$  的参数值  $\bar{u} = 0.518\ 590\ 0$ 。2) 点  $p^*(0.881\ 7, 0.993\ 0)$  在此表示下的参数值。

过  $p$  做  $\overline{b_0 b_2}$  的垂线交  $\overline{b_0 b_2}$  于点  $m$ , 显然  $\mu = \frac{\overline{b_0 m}}{\overline{m b_2}} = 1$  将  $\bar{u} = 0.51859$   $\mu = 1$  代入式(8)

求得  $\lambda^* = 1 - \mu\sqrt{\mu}(\frac{1}{\bar{u}} - 1)^3 = 0.2$ 。将  $\lambda^* = 0.2$

代入式(2) 即得该半圆弧的一个标准型有理三次 Bézier 表示, 控制点及权因子分别为  $b_0^* = \bar{b}_0$ ,  $b_3^* = \bar{b}_2$ ,  $b_1^* = \bar{b}_0 + 1.6b$   $b_2^* = \bar{b}_2 + 2.5b$ ;  $\omega_0 = \omega_3 = 1$ ,  $\omega_1 = 0.3868$ ,  $\omega_2 = 0.2873$ 。

下面求  $p^*$  (0.8817 0.9930) 在此表示下的参数值。过  $p^*$  做  $\overline{b_0 b_2}$  的垂线交  $\overline{b_0 b_2}$  于点  $m^*$ , 求得  $\mu = \frac{\overline{b_0 m^*}}{\overline{m^* b_2}} = \frac{0.8817}{2 - 0.8817} = 0.7884288$ , 将  $\mu = 0.7884288$ ,  $\lambda^* = 0.2$  代入式(11) 求得点  $p^*$  (0.8817 0.9930) 的参数值  $\bar{u} = 0.488829$ 。如图 7 所示。

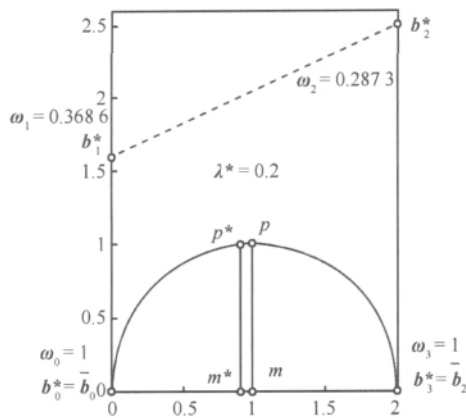


图 7 反求圆弧标准型有理三次 Bézier 表示 ( $\theta = \pi$ )

Fig.7 Finding inversely the standard-form cubic rational Bézier representation of circular arcs ( $\theta = \pi$ )

## 5 结论

给出圆弧一个带参数  $\lambda$  的标准型有理三次 Bézier 表示, 让  $\lambda$  在一定范围内变化, 就可以得到同一圆弧不同的标准型有理三次 Bézier 表示。通过调节参数  $\lambda$  的值, 不仅可以改变两内顶点的位置和两内权因子的值, 而且也改变了肩点的位置, 实际上改变了圆弧上的点与参数域内点的对应关系, 即具有不同的参数化效果。只要给定圆弧的一个标准型有理三次 Bézier 表示, 就能得到与其具有相同参数化效果的非标准型有理二次 Bézier 表示, 反之亦然, 参

数  $\lambda$  值的变化实际上对应一个有理线性参数变换, 将同一圆弧不同的标准型有理三次 Bézier 表示之间的关系与一个有理线性参数变换联系起来, 回答了施法中在文献[1]中提出的问题。已知圆弧的标准型有理三次 Bézier 表示, 就能够反求圆弧上一点的参数值, 反之给定圆弧上一点的参数值, 也能够反求对应的标准型有理三次 Bézier 表示。

## 参考文献 (References)

- [1] Shi Fazhong. Computer Aided Geometric Design and Non Uniform Rational Basic Spline [M]. Beijing: Higher Educational Press, 2001: 346-395. [施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 346-395.]
- [2] Zhu Xinxiong. Modeling Technology of Free Formed Curves and Surfaces [M]. Beijing: Science Press, 2000: 138-168. [朱心雄. 自由曲线曲面造型技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2000: 138-168.]
- [3] Les Piegl, Wayne Tiller. The NURBS Book [M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1997: 281-329.
- [4] Han Xian, Shi Fazhong. An investigation of parametrization of rational Bézier curves [J]. Mini-Micro System, 2001, 22(1): 63-65. [韩西安, 施法中. 有理 Bézier 曲线参数化方法研究 [J]. 小型微型计算机系统, 2001, 22(1): 63-65.]
- [5] Wang Guojin, Wang Guozhao, Zheng Jianmin. Computer Aided Geometric Design [M]. Beijing: Higher Educational Press, 2001: 57-68. [王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 57-68.]
- [6] Wang Guojin. Rational cubic circular arcs and their application in CAD [J]. Computer in Industry, 1991, 16(3): 283-288.
- [7] Qin Kaihuai, Guan Youjiang. Representing circular arcs by NURBS of degree three [J]. Chinese Journal of Computers, 1995, 18(2): 146-152. [秦开怀, 关右江. 圆弧曲线的三次 NURBS 表示 [J]. 计算机学报, 1995, 18(2): 146-152.]
- [8] Li Qiang, Xi Guang, Wang Shangjin. Some practical approaches of representing circular arcs with NURBS [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 1999, 11(5): 467-469. [李强, 席光, 王尚锦. NURBS 表示圆弧曲线的实用方法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1999, 11(5): 467-469.]
- [9] Liu Shu, Chen Yujian, Sun Jianguang. Methods for analyzing parametrization of rational Bézier curves representing circular arcs with degree three/four [J]. J. Tsinghua Univ.: Sci&Tech. 2003, 43(1): 112-115. [刘书, 陈玉健, 孙家广. 有理三次/四次 Bézier 圆弧曲线参数化的分析方法 [J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2003, 43(1): 112-115.]
- [10] Hu Qianqian, Wang Guojin. The geometric meaning of parameters of rational conic curves [J]. Scientia Sinica Mathematica, 2005, 35(5): 513-525. [胡倩倩, 王国瑾. 有理圆锥曲线段的参数的几何意义 [J]. 中国科学: 数学, 2005, 35(5): 513-525.]