

LIU Wanzeng, CHEN Jun, YAN Chaode, et al. Model for Calculating Topology Stable Area of the Plane Discrete Points[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(1): 127-132. (刘万增, 陈军, 闫超德, 等. 平面离散点集拓扑邻近稳定区域计算模型[J]. 测绘学报, 2012, 41(1): 127-132.)

## 平面离散点集拓扑邻近稳定区域计算模型

刘万增<sup>1</sup>, 陈 军<sup>1</sup>, 闫超德<sup>3</sup>, 赵仁亮<sup>1</sup>, 赵 勇<sup>1</sup>, 孙文彬<sup>2</sup>

1. 国家基础地理信息中心, 北京 100830; 2. 中国矿业大学(北京)地球科学与测绘工程学院, 北京 100083; 3. 郑州大学地理信息工程系, 河南 郑州 450001

### Model for Calculating Topology Stable Area of the Plane Discrete Points

LIU Wanzeng<sup>1</sup>, CHEN Jun<sup>1</sup>, YAN Chaode<sup>3</sup>, ZHAO Renliang<sup>1</sup>, ZHAO Yong<sup>1</sup>, SUN Wenbin<sup>2</sup>

1. National Geomatics Center of China, Beijing 100830, China; 2. College of Geoscience and Surveying Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China; 3. Department of GIS, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China

Abstract: A method to maintain the neighboring relations between each two points in discrete points set is studied based on the Delaunay triangulation or the Voronoi diagram. A new concept of the topology stable area is put forward firstly, then the two conditions which the points in the topology stable area should be met are proved by the empty circle rule of the Delaunay triangulation. A novel calculation model of the topology stable area of the plane discrete points based on the Voronoi diagram is presented and its correctness is proved by the experiment.

Key words: Voronoi diagram; Delaunay triangulation; topology stable area

摘 要: 利用 Voronoi 图及其对偶 Delaunay 三角网研究平面离散点集拓扑邻近稳定区域的计算方法, 给出拓扑邻近稳定区域的概念, 证明点的拓扑邻近稳定区域必须满足的两个条件, 给出点的拓扑邻近稳定区域定量计算模型, 并通过试验证明其正确性。

关键词: Voronoi 图; Delaunay 三角网; 拓扑邻近稳定区域

中图分类号: P208

文献标识码: A

文章编号: 1001-1595(2012)01-0127-06

基金项目: 国家自然科学基金(40701141)

## 1 引 言

邻近关系是平面离散点集的重要拓扑特性。在 GIS 中, 点是构成空间目标的最简单元素, 平面离散点集的 Voronoi 图确定了其间的邻近关系, 构成离散点间的拓扑结构<sup>[1-2]</sup>。GIS 中点集邻近关系的建立、维护与重构对于 GIS 中数据综合<sup>[3-6]</sup>、位置服务、数据库更新以及人工智能领域等具有重要意义。一般认为, 随着某一点的移动, 平面离散点集的 Voronoi 图局部会发生变化, 从而引起平面离散点集局部拓扑结构的改变<sup>[7-8]</sup>。其实, 在点目标周围存在这样一个区域, 目标在其内移动, 不会引起其与周围邻近点的拓扑结构的变化, 称该区域为拓扑邻近稳定区域。拓扑邻近稳定区域的确定是维护目标间的拓扑结构的基础。目前关于这一问题的研究较少, 文献<sup>[9-11]</sup>从不同角度研究点目标移动时, 其与周围点目标邻近关系的变化, 并给出定性描述, 但关于目标拓扑邻近稳定区域的定义及其定量计算或描述的研究目前尚未见到。本文对

这一问题进行研究, 证明点的拓扑邻近稳定区域必须满足的两个条件, 并给出其定量计算模型。

## 2 拓扑邻近稳定区域的确定

如图 1 为平面上的离散点集  $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_5\}$  的 Voronoi 图及其对偶 Delaunay 三角网。如果平面上两点连线为 Delaunay 三角网的一条边, 则称该两点一阶邻近(即如果  $Line(P_i, P_j) \in DT$ , 则  $K_{adjacent}^1(P_i, P_j) = true$ , 其中,  $DT$  为 Delaunay triangle 的边集合)。将图 1 中点  $P_0$  定义为活动点, 依次连接其一阶邻近点得到一个多边形  $P_1P_2P_3P_4P_5$ , 称之为移动点  $P_0$  的一阶邻近多边形, 用  $ADJ\ polygon(P_0)$  表示。图 1 中  $P_0$  点在深色区域内移动, 其与点  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  的一阶邻近关系不会改变, 同时, 没有新的一阶邻近点产生, 即  $P_0$  点与点  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  组成的一阶邻近多边形  $ADJ\ polygon(P_0)$  不会发生变化。分析认为, 拓扑邻近稳定区域也就是在保证一阶邻近多边形不变的情况下活动点  $P_0$  的移动区域。以下首先证

明点的拓扑邻近稳定区域必须满足的两个条件,以此为基础研究活动点拓扑邻近稳定区域确定方法。

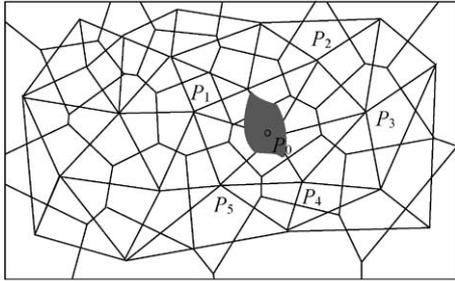


图 1 平面离散点集及其邻近关系

Fig. 1 The neighboring relations between the plane discrete points

2.1 不改变原一阶邻近点的活动点移动区域

如图 1,在活动点  $P_0$  移动过程中,要保持其一阶邻近多边形不变,首先必须满足其与点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  的一阶邻近关系不会改变。反过来,如果要满足点  $P_0$  与点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  一阶邻近关系不变,那么点  $P_0$  的允许移动区域需要确定。平面上任意 3 个非共线点可以确定一个外接圆,根据 Delaunay 三角网的空圆规则可以判断活动点  $P_0$  与任意 3 个非共线点的邻近关系<sup>[12]</sup>。以上的例子中,若点  $P_0$  与点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  一阶邻近关系不变,则  $P_0$  与点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  中任意相邻 3 点一阶邻近关系不变;反过来,若点  $P_0$  同时与点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  中任意相邻 3 点一阶邻近关系不变,则点  $P_0$  与点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  中每一点一阶邻近关系不变。因此,研究不改变原一阶邻近点的活动点移动区域,首先研究在保持活动点与任意 3 个非共线点的邻近关系不变的情况下,活动点  $P_0$  的移动范围。

2.1.1 平面上活动点与 3 点一阶邻近的定义

定义:如果活动点与 3 个非共线点当中的每一点一阶邻近,则称该活动点与该平面 3 点一阶邻近。

活动点  $P_0$  与平面 3 个非共线点  $P_{i-1}$ 、 $P_i$ 、 $P_{i+1}$ , 如果  $(K_{\text{adjacent}}^1(P_0, P_{i-1}) = \text{true}) \wedge (K_{\text{adjacent}}^1(P_0, P_i) = \text{true}) \wedge (K_{\text{adjacent}}^1(P_0, P_{i+1}) = \text{true})$ , 则  $K_{\text{adjacent}}^1(P_0, (P_{i-1}, P_i, P_{i+1})) = \text{true}$ 。

2.1.2 与相邻 3 点一阶邻近的活动点  $P_0$  的移动区域

如图 2,  $\odot O$  为点  $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  的外接圆,当  $P_0$  位于  $\odot O$  内部时,  $P_0$  与  $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  一阶邻近,当

$P_0$  移动到外接圆上时,线段  $P_3P_4$  的垂直平分线与线段  $P_4P_5$  的垂直平分线相交于圆心点  $O$ ,这时,  $P_0$ 、 $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  4 点共圆,点  $P_0$  与点  $P_4$  的 Voronoi 区域边界只交于一点  $O$ ,改变了二者的邻近关系,点  $P_0$  仅与点  $P_3$ 、 $P_5$  一阶邻近。随着  $P_0$  移出到圆外部,点  $P_0$ 、 $P_4$  的 Voronoi 区域边界交集为空,表示二者仍非一阶邻近关系。可见,点  $P_0$  与点  $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  是否一阶邻近,主要取决于  $P_0$  点与点  $P_3$ 、 $P_4$ 、 $P_5$  外接圆的位置关系<sup>[13]</sup>。

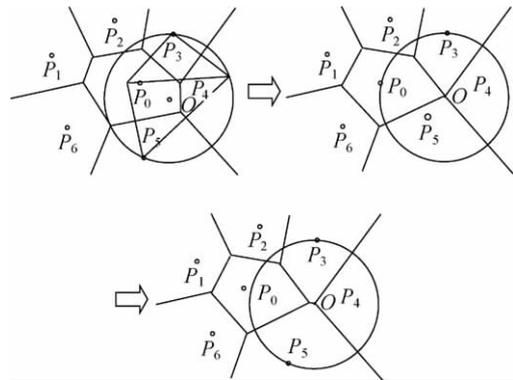


图 2 活动点  $P_0$  位置变化对邻近关系的影响

Fig. 2 The change of position of the point  $P_0$  may affect the neighboring relations between the points in the plane

引理:与平面上点  $P_{i-1}$ 、 $P_i$ 、 $P_{i+1}$  一阶邻近的所有  $P_0$  点的集合  $(A^1(i))$  等于以点  $P_{i-1}$ 、 $P_i$ 、 $P_{i+1}$  为顶点的  $\triangle P_{i-1} P_i P_{i+1}$  的外接圆内部点集  $(A^1(i)_{\text{circle}})$  与以  $\triangle P_{i-1} P_i P_{i+1}$  顶点为起点的三角形两边反向延长线所夹区域内点集  $(A^1(i)_{\text{section1}})$  的并集。如图 3 所示

$$\left. \begin{aligned} A^1(i)_{\text{circle}} &= \{P_0 \mid P_0 \in A^1(i)_{\text{circle}}\} \\ A^1(i)_{\text{section}} &= \{P_0 \mid P_0 \in (A^1(i)_{\text{section1}} \cup A^1(i)_{\text{section2}} \cup A^1(i)_{\text{section3}})\} \\ A^1(i) &= A^1(i)_{\text{circle}} \cup A^1(i)_{\text{section}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

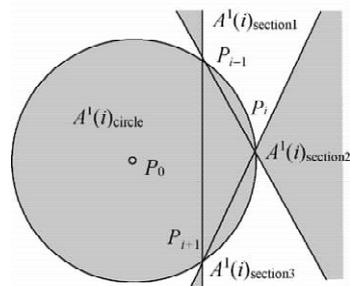


图 3 与已知 3 点一阶邻近的活动点  $P_0$  的移动范围

Fig. 3 The moving range of point  $P_0$  which is neighbor to the three points

证明:

(1) 如图 4(a), 当  $P_0$  位于  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  的外部、外接圆的内部时(称该区域为:  $A_1^{-1}(i)_{circle} = \{P_0 \mid (P_0 \in A^1(i)_{circle}) \wedge (P_0 \notin A^1(i)_{\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}})\}$ ), 根据 Delaunay 三角网的空圆规则<sup>[9]</sup>,  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  不能作为 Delaunay 三角网的一个三角形,  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  的任意一条边不能作为点  $P_0, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  所形成的凸四边形的对角线, 亦即, 点  $P_0$  与点  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  分别有一条 Delaunay 三角形的边相连, 则点  $P_0$  与点  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  必然一阶邻近。

(2) 如图 4(b), 当点  $P_0$  在  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  的内部或边上时(称之为区域  $A_2^{-1}(i)_{circle} = \{P_0 \mid P_0 \in A^1(i)_{\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}}\}$ )。同样, 根据空圆规则,  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  不能作为 Delaunay 三角网的一个三角形, 需要对其重新剖分, 在三角形内部及边上一点对该三角形进行剖分有且只有一种剖分结果, 就是将该点分别与原三角形的三个顶点相连, 线段  $P_0P_{i-1}, P_0P_i, P_0P_{i+1}$  就分别成为 Delaunay 三角形的一条边, 因而点  $P_0$  分别与点  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  一阶邻近。

(3) 如图 4(c), 当点  $P_0$  位于  $A^1(i)_{section1}, A^1(i)_{section2}$  或  $A^1(i)_{section3}$  内部(即  $P_0 \in A^1(i)_{section}$ ), 同样由于点  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  外接圆为空圆, 因而,  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  可以作为 Delaunay 三角网的一个三角形。图中, 由于点  $P_0$  位于线段  $P_{i-1}P_i, P_{i+1}P_i$  延长线所形成的扇形区域(不包括延长线上的点)内, 点  $P_i$  必然位于  $\triangle P_{i-1}P_0P_{i+1}$  中, 以点  $P_i$  对  $\triangle P_{i-1}P_0P_{i+1}$  进行剖分, 则  $P_0$  点与点  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  的连线分别为 Delaunay 的一条边, 因而  $P_0$  点分别与点  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  一阶邻近。

(4) 如图 4(d), 当点  $P_0$  位于  $A^1(i)$  区域外时, 即  $P_0 \in (A^1(i))^{-}$ , 由于  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  外接圆为空圆, 因而  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  可以作为 Delaunay 三角网的一个三角形, 点  $P_0$  与点  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  可以形成一个以  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  的边为对角线的凸四边形,  $P_0$  只能和其最近的  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  的两个顶点相连构成新的三角形, 与  $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$  的另外一个顶点没有边相连, 不具有一阶邻近关系。

由于平面点的全集  $S = A^1(i) \cup (A^1(i))^{-} = A^1(i)_{circle} \cup A^1(i)_{section} \cup (A^1(i))^{-} = A_1^{-1}(i)_{circle} \cup A_2^{-1}(i)_{circle} \cup A^1(i)_{section} \cup (A^1(i))^{-}$ , 以上讨论的 4 类区域的并集代表整个平面区域, 因而,  $A^1(i) = A^1(i)_{circle} \cup A^1(i)_{section}$  可以完满地表示平面上与点  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  相邻的点  $P_0$  的集合。

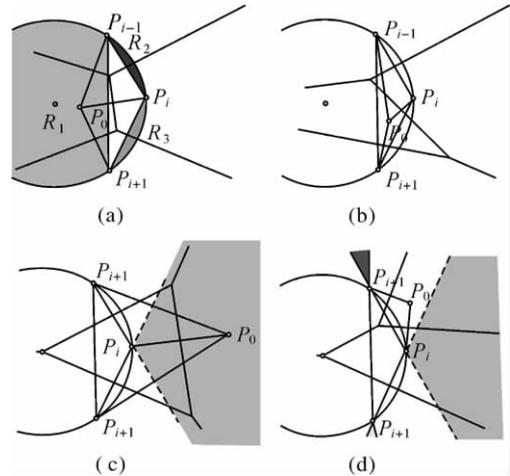


图 4 平面上不同区域活动点与已知 3 点的邻近关系  
Fig. 4 The neighboring relations between the point  $P_0$  and the other three points of the plane in the different area

以上证明了与一阶邻近多边形连续 3 个顶点保持邻近关系的点  $P_0$  的活动区域, 若保证点  $P_0$  与其一阶邻近多边形中每一顶点都一阶邻近, 显然,  $P_0$  应该处在其一阶邻近多边形每连续 3 顶点所确定区域  $A^1(i)$  的交集内。

结论 1: 若  $P_0$  与  $n$  个一阶邻近点的一阶邻近关系保持不变, 则  $P_0$  点必须位于其  $n$  个一阶邻近点中依次相邻 3 个一阶邻近点所形成的  $n$  个  $A^1(i)$  区域的交集内。

设  $P_i(1, 2, \dots, n)$  为  $P_0$  点的一阶邻近点, 相邻一阶邻近点  $P_n, P_1, P_2, P_1, P_2, P_3, P_2, P_3, P_4, \dots, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}, P_n, P_{n-1}, P_n, P_1$  的  $A^1(i)$  区域分别为  $A^1(1), A^1(2), \dots, A^1(n)$ , 则

$$A^1 = A^1(1) \cap A^1(2) \cap \dots \cap A^1(n) = (A^1(1)_{circle} \cup A^1(1)_{section}) \cap (A^1(2)_{circle} \cup A^1(2)_{section}) \cap \dots \cap (A^1(n)_{circle} \cup A^1(n)_{section}) \quad (2)$$

### 2.2 不产生新的一阶邻近点的活动点 $P_0$ 的移动区域

结论 1 所确定的区域  $A^1$  只能保证在点  $P_0$  移动过程中保持与原有一阶邻近点的邻近关系不变, 但不能保证其没有新的一阶邻近点产生。随着  $P_0$  点的移动, 尽管其与原有一阶邻近点的邻近关系不变, 但其可能与原二阶邻近点形成新的一阶邻近关系, 其一阶邻近点数目增加, 一阶邻近多边形由于顶点数目增加而发生变化。那么, 活动点  $P_0$  与原一阶邻近点邻近关系不变的情况下, 进一步研究是否有新的一阶邻近点产生。

如图 5(a) 所示, 在点  $P_0$  移动之前, 其邻近多边形顶点为点  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , 线段  $P_4P_5$  为一阶邻近多边形的一条边, 点  $P_4, P_5$  共同的一阶邻近点为点  $P_0$  和  $P_6$ 。点  $P_0$  位于  $\triangle P_4P_5P_6$  的外接圆外部, 与点  $P_6$  是二阶邻近关系, 此时, 点  $P_0, P_4, P_5, P_6$  4 点满足空外接圆规则, 线段  $P_4P_5$  为 4 点所构成四边形的对角线。当  $P_0$  点移动到  $\triangle P_4P_5P_6$  外接圆及其内部时 ( $P'_0$  点位置), 空圆规则破坏, 需要对四边形重新剖分, 交换对角线, 此时点  $P_0$  与点  $P_6$  成为 Delaunay 三角形的一条边, 点  $P_6$  成为点  $P_0$  的一阶邻近点, 形成如图 5(b) 所示的  $P_0$  点新的一阶邻近多边形  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 。可以看出, 要保证  $P_0$  点邻近多边形的边不变, 没有新的一阶邻近点加入,  $P_0$  点必须位于该边两端点及其除  $P_0$  点以外的另一共同一阶邻近点所确定外接圆的外部。

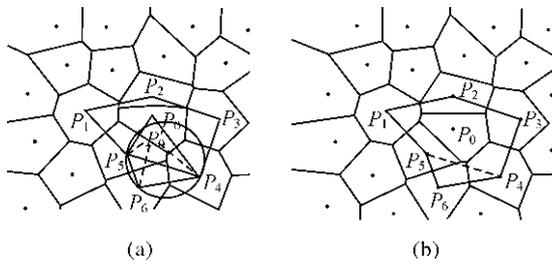


图 5  $P_0$  点移动导致其邻近多边形变化图

Fig. 5 The moving of the point  $P_0$  may change it's neighboring polygon

结论 2: 点  $P_0$  在  $A^1$  区域内移动时要确保其没有新的一阶邻近点产生, 则  $P_0$  点应保持在该边两端点及其除  $P_0$  点以外的另一共同一阶邻近点所确定外接圆的外部(必要条件)。

设  $P_0$  点邻近多边形  $ADJ\ polygon(P_0)$  的边  $P_jP_{j+1}$  的两个端点  $P_j, P_{j+1}$  与该两点在邻近多边形外侧的共同一阶邻近点的外接圆区域为  $A^2(j)_{circle}$ , 则在满足条件的  $P_0$  点的活动区域可以表示为  $A^2 = (A^2(1)_{circle} \cup A^2(2)_{circle} \cup \dots \cup A^2(n)_{circle})^-$  (3)

### 2.3 活动点拓扑邻近稳定区域的确定

结论 2 只是保持  $P_0$  点一阶邻近多边形不变的必要条件。如图 6(a) 中的绿色区域为满足结论 2 的  $P_0$  点移动范围; 图 6(b) 表示当  $P_0$  点在绿色区域中移动时, 其邻近多边形发生了变化, 改变原一阶邻近的一阶邻近关系。可见, 如果  $P_0$  点移动后只满足结论 1, 虽然可以保持原有一阶邻近点不变, 但可增加新的一阶邻近点; 如果只满足

结论 2, 尽管可以确保不会增加一阶邻近点, 可是会造成原有一阶邻近点数目减少。可见, 要保证  $P_0$  点移动后, 其一阶邻近点既不增加又不减少,  $P_0$  点必须同时满足结论 1 与结论 2 的条件。

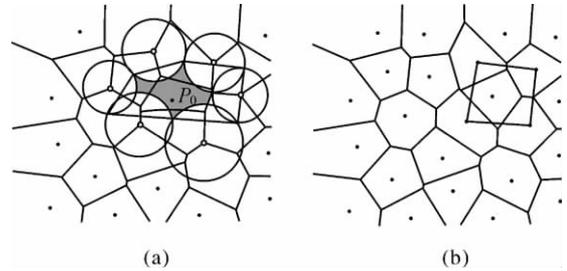


图 6 仅满足结论 2 的效果图

Fig. 6 The result of conclusion 2

结论 3: 若保持  $P_0$  点的一阶邻近多边形不变,  $P_0$  点必须位于  $A^1$  区域与  $A^2$  区域的交集内。

$$A = A^1 \cap A^2 \quad (4)$$

图 7、图 8 为利用结论 3 确定的拓扑稳定区域。

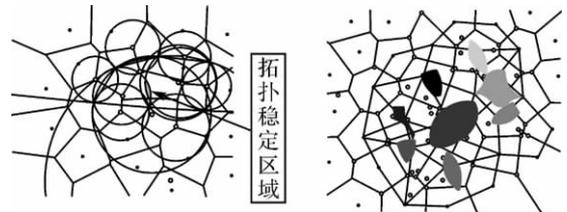


图 7 结论 3 所确定的  $P_0$  图 8 结论 3 所确定的离散点的拓扑稳定区域

Fig. 7 The topology stable area of point  $P_0$  Fig. 8 The topology stable areas of the plane defined by conclusion 3 discrete points defined by conclusion 3

### 3 活动点拓扑邻近稳定区域的计算

根据结论 3, 可以给出活动点拓扑邻近稳定区域的计算模型。

如图 9, 设点  $P_0$  为扇形区域  $A^1(i)_{section}$  中任意一点, 则向量  $P_{(i+1)}P_i$  与  $P_iP_0$  的夹角  $\beta_1$ , 向量  $P_iP_0$  与  $P_{(i-1)}P_i$  的夹角  $\beta_2$ , 向量  $P_{(i+1)}P_i$  与  $P_{(i-1)}P_i$  的夹角  $\beta$  存在以下关系

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta \quad (5)$$

$$\beta_1 = \arccos\left(\frac{1 + k_{(i+1)-i}k_{i-0}}{\sqrt{(1 + k_{(i+1)-i}^2)(1 + k_{i-0}^2)}}\right) \quad (6)$$

$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{1 + k_{i-0}k_{(i-1)-i}}{\sqrt{(1 + k_{i-0}^2)(1 + k_{(i-1)-i}^2)}}\right) \quad (7)$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{1 + k_{(i+1)-i}k_{(i-1)-i}}{\sqrt{(1 + k_{(i+1)-i}^2)(1 + k_{(i-1)-i}^2)}}\right) \quad (8)$$

式中,  $K_{(i+1)-i}$  表示过点  $P_{i+1}$ 、 $P_i$  的直线的斜率, 其计算公式为

$$k_{(i+1)-i} = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad (9)$$

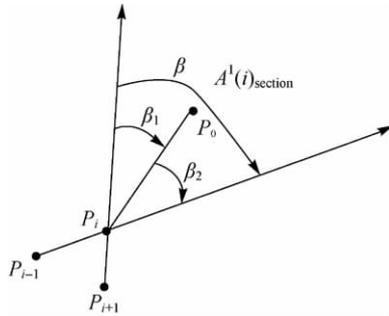


图 9 扇形区域内点满足的条件

Fig. 9 The condition must be met by the points in the sector

将式(6)、(7)、(8)代入式(5), 得到式(10), 则

$A^1(i)_{\text{section}}$  中点  $P_0$  坐标一定满足该等式

$$\begin{aligned} & \arccos\left(\frac{1+k_{(i+1)-i}k_{i-0}}{\sqrt{(1+k_{(i+1)-i}^2)(1+k_{i-0}^2)}}\right) + \\ & \arccos\left(\frac{1+k_{i-0}k_{(i-1)-i}}{\sqrt{(1+k_{i-0}^2)(1+k_{(i-1)-i}^2)}}\right) = \\ & \arccos\left(\frac{1+k_{(i+1)-i}k_{(i-1)-i}}{\sqrt{(1+k_{(i+1)-i}^2)(1+k_{(i-1)-i}^2)}}\right) \quad (10) \end{aligned}$$

设点  $P_i(1, 2, \dots, n)$  为点  $P_0(x, y)$  的一阶邻近点, 其坐标为  $(x_i, y_i)$ ,  $\triangle P_n P_1 P_2$ 、 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 、 $\triangle P_{i-1} P_i P_{i+1}$ 、 $\dots$ 、 $\triangle P_{n-1} P_n P_1$  的外接圆圆心坐标和半径分别为  $(x_{1i}^0, y_{1i}^0)$ 、 $r_{1i}$ , 设  $P_0$  点一阶邻近多边形  $ADJ \text{ polygon}(P_0)$  的边  $P_i P_{i+1}$  的两个端点  $P_i$ 、 $P_{i+1}$  除  $P_0$  点外的另一个共同一阶邻近点  $P_j$  的坐标为  $(x_j, y_j)$ ,  $P_i$ 、 $P_{i+1}$ 、 $P_j$  圆心坐标和半径分别为  $(x_{2i}^0, y_{2i}^0)$ 、 $r_{2i}$ , 则  $P_0$  点坐标  $(x, y)$  为满足以下方程的解

$$\left. \begin{aligned} & (x-x_{11}^0)^2 + (y-y_{11}^0)^2 < r_{11}^2 \\ & (x-x_{12}^0)^2 + (y-y_{12}^0)^2 < r_{12}^2 \\ & \vdots \\ & (x-x_{1i}^0)^2 + (y-y_{1i}^0)^2 < r_{1i}^2 \\ & \vdots \\ & (x-x_{1n}^0)^2 + (y-y_{1n}^0)^2 < r_{1n}^2 \\ & \arccos\left(\frac{1+k_{3-2}k_{2-0}}{\sqrt{(1+k_{3-2}^2)(1+k_{2-0}^2)}}\right) + \arccos\left(\frac{1+k_{2-0}k_{1-2}}{\sqrt{(1+k_{2-0}^2)(1+k_{1-2}^2)}}\right) = \arccos\left(\frac{1+k_{3-2}k_{1-2}}{\sqrt{(1+k_{3-2}^2)(1+k_{1-2}^2)}}\right) \\ & \arccos\left(\frac{1+k_{4-3}k_{3-0}}{\sqrt{(1+k_{4-3}^2)(1+k_{3-0}^2)}}\right) + \arccos\left(\frac{1+k_{3-0}k_{2-3}}{\sqrt{(1+k_{3-0}^2)(1+k_{2-3}^2)}}\right) = \arccos\left(\frac{1+k_{4-3}k_{2-3}}{\sqrt{(1+k_{4-3}^2)(1+k_{2-3}^2)}}\right) \\ & \vdots \\ & \arccos\left(\frac{1+k_{(i+1)-i}k_{i-0}}{\sqrt{(1+k_{(i+1)-i}^2)(1+k_{i-0}^2)}}\right) + \arccos\left(\frac{1+k_{i-0}k_{(i-1)-i}}{\sqrt{(1+k_{i-0}^2)(1+k_{(i-1)-i}^2)}}\right) = \arccos\left(\frac{1+k_{(i+1)-i}k_{(i-1)-i}}{\sqrt{(1+k_{(i+1)-i}^2)(1+k_{(i-1)-i}^2)}}\right) \\ & \vdots \\ & \arccos\left(\frac{1+k_{n-1}k_{1-0}}{\sqrt{(1+k_{n-1}^2)(1+k_{1-0}^2)}}\right) + \arccos\left(\frac{1+k_{1-0}k_{2-1}}{\sqrt{(1+k_{1-0}^2)(1+k_{2-1}^2)}}\right) = \arccos\left(\frac{1+k_{n-1}k_{2-1}}{\sqrt{(1+k_{n-1}^2)(1+k_{2-1}^2)}}\right) \\ & (x-x_{21}^0)^2 + (y-y_{21}^0)^2 > r_{21}^2 \\ & (x-x_{22}^0)^2 + (y-y_{22}^0)^2 > r_{22}^2 \\ & \vdots \\ & (x-x_{2i}^0)^2 + (y-y_{2i}^0)^2 > r_{2i}^2 \\ & \vdots \\ & (x-x_{2n}^0)^2 + (y-y_{2n}^0)^2 > r_{2n}^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

### 4 试 验

采用本文方法和逐点试探法分别绘制移动点  $P_0$  的拓扑稳定区域, 进一步验证结论 3 的正确性。图 10 是按照该方法, 即利用式(11)绘出的移动点  $P_0$  的拓扑稳定区域。图 11 为逐点试探所

确定的移动点  $P_0$  的拓扑稳定区域, 是以保持  $P_0$  点的一阶邻近多边形不变为约束条件, 以邻近多边形内的每一点代替  $P_0$ , 生成 Voronoi 图及邻近关系, 判断  $P_0$  点的邻近多边形是否变化, 如果不变则记录下该点, 最后绘出满足条件的所有  $P_0$  点。试验证明两种方法绘出的满足条件的  $P_0$  点

的区域是等价的,验证结论 3 的正确性。

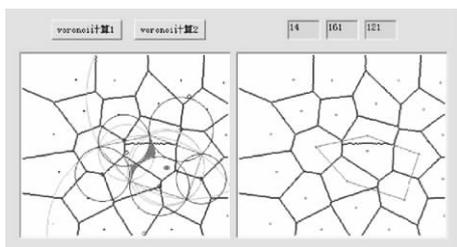


图 10 采用本文方法得到的拓扑稳定区域

Fig. 10 Topology stable area generated by above method

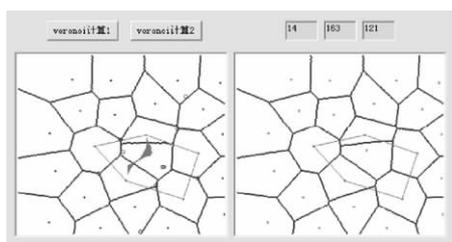


图 11 采用逐点试探法得到的拓扑稳定区域

Fig. 11 Topology stable area generated by the one by one trying method

## 5 结 论

提出在平面离散点集中每一点的周围存在一个拓扑邻近稳定区域,并给出其计算方法。点的拓扑邻近稳定区域计算之后,在点移动过程中,不需要重构 Voronoi 图或 Delaunay 三角网即可判断其与周围各点的邻近关系,同时利用点的拓扑邻近稳定区域可以在确保点的邻近关系不变的情况下,进行相关条件约束下的点目标位置最优规划。线目标和面目标可看做由一系列点连接而成<sup>[14-15]</sup>。将对基于点的拓扑邻近稳定区域计算模型对线和面的拓扑邻近稳定区域计算方法作进一步研究。

## 参考文献:

- [1] GOLD C M. Spatial Adjacency a General Approach[EB/OL]. [2005-03-18]. [http://www.voronoi.com/wiki/images/a/ae/Spatial\\_adjacency-a\\_general\\_approach.pdf](http://www.voronoi.com/wiki/images/a/ae/Spatial_adjacency-a_general_approach.pdf).
- [2] GOLD C M. The Meaning of "Neighbour" [C]//Proceedings International Conference GIS: Theories and Methods of Spatial-temporal Reasoning in Geographic Space. Berlin: Springer-Verlag, 1992:220-235.
- [3] CHARISTOPHER B J,GERAINT L B, WARE J M. Map Generalization with a Triangulated Data Structure [J]. Cartography and GIS,1995,22(4):317-331.
- [4] TSAL V J D. Delaunay Triangulations in TIN Creation: an Overview and a Linear-time Algorithm [J]. International Journal

- of Geographical Information Systems, 1993, 7(6):501-524.
- [5] WEIBEL R, JONES C B. Computational Perspectives on Map Generalization Guest Editorial for Special [J]. Geo-Informatica, 1998, 2(4): 307-314.
- [6] AI Tinghua, LIU Yaolin. A Method of Point Cluster Simplification with Spatial Distribution Properties Preserved[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,2002, 31(2): 175-181. (艾廷华,刘耀林.保持空间分布特征的群点化简方法[J].测绘学报,2002, 31(2): 175-181.)
- [7] YANG W. The Design of a Dynamic Voronoi Map Object (VMO) Model for Sustainable Forestry Data Management [D]. Laval:Laval University, 1997.
- [8] CHEN Jun. The Voronoi Dynamic Spatial Data Model[M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2002. (陈军. Voronoi 动态空间数据模型 [M]. 北京:测绘出版社, 2002.)
- [9] WANG P. Automated Generalization in GIS [M]. Wageningen: Agricultural University and ITC, 1997.
- [10] GOLD C M, YANG W. Spatial Data Management Tools Based on the Voronoi Dynamic Data Model (Vordll 1.0) User's Manual[R]. Laval: Laval University, 1994.
- [11] MAO Jianhua, CHEN Fei, MAO Duanqian. A Method for Detecting the Topological Relations' Change of the Moving Object[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2003(4):22-24. (毛建华,陈斐,毛端谦.地图目标移动的拓扑关系变化检测方法[J].测绘通报,2003(4):22-24.)
- [12] LEDOUX H, GOLD C M. A Voronoi-based Map Algebra [EB/OL]. [2005-03-18]. [http://www.voronoi.com/wiki/images/0/0f/Voronoi\\_map\\_algebra.pdf](http://www.voronoi.com/wiki/images/0/0f/Voronoi_map_algebra.pdf).
- [13] MIOC D, ANTON F, GOLD C M, et al. Map Updates in a Dynamic Voronoi Data Structure[EB/OL]. [2005-03-18]. [http://www.voronoi.com/wiki/images/0/0f/map\\_updates\\_in\\_a\\_dynamic\\_voronoi\\_data\\_structure.pdf](http://www.voronoi.com/wiki/images/0/0f/map_updates_in_a_dynamic_voronoi_data_structure.pdf).
- [14] CHEN Jun, LIU Wanzeng, LI Zhilin, et al. The Refined Calculation Method of Topological Relationships between Line Objects[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,2006, 35(8):255-260. (陈军,刘万增,李志林,等.线目标间拓扑关系的细化计算方法[J].测绘学报,2006, 35(3):255-260.)
- [15] XIE Shunping, FENG Xuezi, LU Wei. Algorithm for Constructing Voronoi Area Diagram Based on Road Network Analysis[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,2010, 39(1): 88-94. (谢顺平,冯学智,鲁伟.基于道路网络分析的 Voronoi 面域图构建算法[J].测绘学报, 2010, 39(1): 88-94.)

(责任编辑:宋启凡)

收稿日期:2010-08-30

修回日期:2011-06-13

第一作者简介:刘万增(1972—),男,博士,高级工程师,研究方向为空间关系、空间数据库更新及应急制图。

First author: LIU Wanzeng(1972—), male, PhD, senior engineer, majors in spatial relations, spatial database updating and emergency mapping.

E-mail: luwnzg@163.com