

WANG Leyang, XU Caijun, ZHANG Chaoyu. A Two-step Method to Determine Relative Weight Ratio Factors in Joint Inversion[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(1): 19-24. (王乐洋, 许才军, 张朝玉. 一种确定联合反演中相对权比的两步法[J]. 测绘学报, 2012, 41(1): 19-24.)

## 一种确定联合反演中相对权比的两步法

王乐洋<sup>1</sup>, 许才军<sup>2</sup>, 张朝玉<sup>2</sup>

1. 东华理工大学 测绘工程学院, 江西 南昌 330013; 2. 武汉大学 测绘学院, 湖北 武汉 430079

### A Two-step Method to Determine Relative Weight Ratio Factors in Joint Inversion

WANG Leyang<sup>1</sup>, XU Caijun<sup>2</sup>, ZHANG Chaoyu<sup>2</sup>

1. Faculty of Geomatics, East China Institute of Technology, Nanchang 330013, China; 2. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

**Abstract:** The two-step method to determine relative weight ratio factors in joint inversion is derived. In the first step, without considering relative weight ratio factors, the joint inversion model of two or more kinds of observation data is established. Through Helmert method of variance components estimation, unit weight variances of observation data are equal (or the ratio of unit weight variances is approximate to 1), and the reasonable and theoretical weight matrix is determined. At the same time, different kinds of observation data are normalized. In the second step, on the base of reasonable weight matrix, the joint inversion model considering relative weight ratio factors is established. The relative weight ratio factors are determined when objective function is minimum. Through simulated data and several solutions, the effectiveness and feasibility of two-step method are proved.

**Key words:** joint inversion; relative weight ratio factors; two-step method; Helmert method of variance components estimation; unit weight variance

**摘 要:** 提出确定联合反演中相对权比的两步法。第 1 步是不考虑相对权比, 建立两类或多类数据的联合反演模型, 通过赫尔墨特方差分量估计使得两类或多类观测数据的单位权方差相等(或单位权方差的比值接近 1), 从而理论上确定观测数据合理的权阵, 同时对不同种类数据进行归一化; 第 2 步是在获得合理的观测数据权阵之后, 建立顾及相对权比的联合反演模型, 以目标函数值为最小来确定权比例因子。通过模拟数据, 设计多个反演方案, 证明两步法的有效性和可行性。

**关键词:** 联合反演; 相对权比; 两步法; 赫尔墨特方差分量估计; 单位权方差

中图分类号: P207

文献标识码: A

文章编号: 1001-1595(2012)01-0019-06

基金项目: 国家自然科学基金(40874003; 40974017; 41074007; 41021061); 国家 863 计划(2009AA12Z317); 国家公益地震行业科研专项(200808080); 教育部博士点基金(20090141110055); 东华理工大学地理空间信息采集处理及应用科技创新团队项目

## 1 引 言

大地测量地球物理联合反演可以融合多种数据(大地测量数据、地震波数据、地质数据以及地球物理数据等), 研究地球动力学, 反演活动断层、块体的运动情况, 探讨地壳运动与地震的关系, 是大地测量学深入地学研究领域的一个重要的手段。联合反演应用的一个关键问题是相对权比的确定, 它体现了各类资料在联合反演中贡献的大小, 一个成功的联合反演必须有一个合理的相对权比, 因此相对权比的研究是当今联合反演研究的一个热点问题, 得到了广泛关注<sup>[1-14]</sup>。目前相

对权比确定的方法主要有 4 种: 将相对权比当做未知数与模型参数一同反演求解; 根据先验信息(验前方差)确定相对权比; 相对权比人为定为 0.5; 赫尔墨特方差分量估计法<sup>[2-4, 7, 9, 13]</sup>。本文针对这些方法的优缺点, 提出确定线性联合反演中相对权比的两步法, 最后通过模拟计算显示方法的有效性和可行性。

## 2 确定联合反演中相对权比的两步法

对于线性反演模型, 假设有两种不同类型的观测数据, 联合反演的目标函数为

$$\Phi = \lambda \mathbf{V}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{V}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{V}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{V}_2 = \min \quad (1)$$

式中,  $V_1 = B_1 \hat{X} - L_1$ ;  $V_2 = B_2 \hat{X} - L_2$ ;  $\lambda (0 < \lambda < 1)$  为相对权比(由于是联合反演,因此本文  $\lambda$  不取 0 和 1);  $P_1 = Q_1^{-1}$ ;  $P_2 = Q_2^{-1}$  为权阵。

将式(1)对  $\hat{X}$  求导有

$$\partial \Phi / \partial \hat{X} = 2\lambda V_1^T P_1 B_1 + 2(1-\lambda) V_2^T P_2 B_2 = 0 \quad (2)$$

转置后得

$$\lambda B_1^T P_1 V_1 + (1-\lambda) B_2^T P_2 V_2 = 0 \quad (3)$$

将  $V_1$  和  $V_2$  代入上式,整理得

$$[\lambda B_1^T P_1 B_1 + (1-\lambda) B_2^T P_2 B_2] \hat{X} = \lambda B_1^T P_1 L_1 + (1-\lambda) B_2^T P_2 L_2 \quad (4)$$

两步法确定线性联合反演模型中相对权比的具体步骤如下。

(1) 第 1 步,用方差分量估计得到两类数据的权阵的估值为  $\hat{P}_i (i=1,2)$ ,以及单位权方差的估值  $\hat{\sigma}_{0_1}^2$  和  $\hat{\sigma}_{0_2}^2$ 。具体步骤为:

① 先不考虑相对权比  $\lambda$ ,联合反演的目标函数为

$$\Phi' = V_1^T P_1 V_1 + V_2^T P_2 V_2 = \min$$

法方程为

$$[B_1^T P_1 B_1 + B_2^T P_2 B_2] \hat{X} = B_1^T P_1 L_1 + B_2^T P_2 L_2 \quad (5)$$

令

$$\left. \begin{aligned} N &= N_1 + N_2 \\ N_1 &= B_1^T P_1 B_1 \\ N_2 &= B_2^T P_2 B_2 \\ W &= W_1 + W_2 \\ W_1 &= B_1^T P_1 L_1 \\ W_2 &= B_2^T P_2 L_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

所以,式(5)变为

$$N \hat{X} = W \quad (7)$$

确定两类观测资料权的初值  $P_1$  和  $P_2$ ,选取时根据前面计算得到的结果作为初值,如利用 GPS 和地震矩张量联合反演地壳运动速度场时, $P_1$  可选为 GPS 站速度场的先验权阵, $P_2$  可选为平均应变率的先验权阵。一般来说两类观测数据的权  $P_1$  和  $P_2$  是可能不准确的,也就是说  $P_1$  和  $P_2$  所对应的单位权方差不相等 ( $\sigma_{0_1}^2 \neq \sigma_{0_2}^2$ )。联合反演中利用赫尔墨特方差分量估计的前提是:两类或多类观测值之间是相互独立的,不独立时必须利用方差-协方差分量估计来确定单位权方差与单位权协方差,然后获得合理的观测值权阵。

② 进行第一次求解,  $\hat{X} = [N_1 + N_2]^{-1} [W_1 + W_2]$ ,  $V_1 = B_1 \hat{X} - L_1$ ,  $V_2 = B_2 \hat{X} - L_2$ ,求得  $V_1^T P_1 V_1$

和  $V_2^T P_2 V_2$ 。

③ 进行第一次方差分量估计<sup>[15]</sup>

$$\hat{S}\hat{\theta} = W_\theta \quad (8)$$

式中

$S =$

$$\begin{bmatrix} n_1 - 2tr(N^{-1}N_1) + tr(N^{-1}N_1)^2 & tr(N^{-1}N_1N^{-1}N_2) \\ tr(N^{-1}N_1N^{-1}N_2) & n_2 - 2tr(N^{-1}N_2) + tr(N^{-1}N_2)^2 \end{bmatrix};$$

$$\hat{\theta} = [\hat{\sigma}_{0_1}^2 \quad \hat{\sigma}_{0_2}^2]^T; \quad W_\theta = [V_1^T P_1 V_1 \quad V_2^T P_2 V_2]^T$$

求得两类观测数据单位权方差的第 1 次估值  $\hat{\sigma}_{0_1}^2$  和  $\hat{\sigma}_{0_2}^2$  ( $\hat{\theta} = S^{-1}W_\theta$ ),再用下式定权<sup>[15]</sup>

$$\hat{P}_i = c / (\hat{\sigma}_{0_i}^2 P_i^{-1}) \quad (i=1,2) \quad (9)$$

式中, $c$  为任一常数,一般选取  $\hat{\sigma}_{0_i}^2$  中的某一个值。

④ 反复进行步骤②和步骤③,即进行求解  $V_i^T P_i V_i (i=1,2)$ —方差分量估计 ( $\hat{\theta} = S^{-1}W_\theta$ )—定权后  $\hat{P}_i = c / (\hat{\sigma}_{0_i}^2 P_i^{-1}) (i=1,2)$ 再求解  $V_i^T P_i V_i (i=1,2)$ ,直至  $\hat{\sigma}_{0_1}^2 = \hat{\sigma}_{0_2}^2$  为止,或通过必要的检验认为两类单位权方差之比等于 1 为止。

第 1 步所用的方程为

$$[B_1^T P_1 B_1 + B_2^T P_2 B_2] \hat{X} = B_1^T P_1 L_1 + B_2^T P_2 L_2$$

目标函数是

$$\Phi' = V_1^T P_1 V_1 + V_2^T P_2 V_2 = \min$$

将两类数据进行了融合匹配,即获得  $\hat{\sigma}_{0_1}^2 = \hat{\sigma}_{0_2}^2$ 。

(2) 第 2 步,根据第 1 步得到的两类观测资料权阵的估值  $\hat{P}_1$  和  $\hat{P}_2$ ,在式(10)下求取相对权比和模型参数,即

$$\left. \begin{aligned} \hat{X} &= (\tau B_1^T \hat{P}_1 B_1 + (1-\tau) B_2^T \hat{P}_2 B_2)^{-1} \cdot \\ & \quad (\tau B_1^T \hat{P}_1 L_1 + (1-\tau) B_2^T \hat{P}_2 L_2) \\ V_1 &= B_1 \hat{X} - L_1 \\ V_2 &= B_2 \hat{X} - L_2 \\ 0 &< \tau < 1 \\ \bar{\Phi}(V_1, V_2) &= \min \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中, $\tau$  为对应于观测值权阵估值  $\hat{P}_i (i=1,2)$  的相对权比,与式(1)中对应于  $P_i (i=1,2)$  的相对权比  $\lambda$  不同; $\bar{\Phi}(V_1, V_2)$  是  $V_1$  和  $V_2$  的函数,常用  $\bar{\Phi}(V_1, V_2)$  函数主要有  $V_1^T \hat{P}_1 V_1 + V_2^T \hat{P}_2 V_2$ ,  $\tau V_1^T \hat{P}_1 V_1 + (1-\tau) V_2^T \hat{P}_2 V_2$ ,  $V_1^T V_1 + V_2^T V_2$  和  $\sum |V_1| + \sum |V_2|$  等。本文算例部分将进行详细讨论。

具体步骤是:选定一个步长,让权比例因子  $\tau$  遍历整个取值区间  $0 < \tau < 1$ ,每个  $\tau$  对应于一个参数解  $\hat{X}$  和  $\bar{\Phi}(V_1, V_2)$ ,把其中  $\bar{\Phi}(V_1, V_2)$  的最小值对应的参数向量和此时的权比例因子作为最终结果。

由式(9)和式(10)得  $\lambda$  与  $\tau$  的关系为

$$\lambda = \frac{\tau \prod_j (\frac{1}{\sigma_{0_1}^2})_j}{\tau \prod_j (\frac{1}{\sigma_{0_1}^2})_j + (1-\tau) \prod_j (\frac{1}{\sigma_{0_2}^2})_j} \quad (11)$$

式中,  $j=1,2,3,\dots$  为两步法第 1 步的迭代次数。

可以将两步法简单概括如下:第 1 步是不考虑相对权比,建立两类或多类数据的联合反演模型,通过赫尔墨特方差分量估计使得两类或多类观测数据的单位权方差相等(或单位权方差的比值接近 1),从理论上确定观测数据合理的权阵,同时对不同种类数据进行归一化;第 2 步是在获得合理的观测数据权阵之后,建立顾及相对权比的联合反演模型,将相对权比和模型参数当做未知数同时进行反演,以目标函数值为最小来确定权比例因子。两步法是一种概括反演方法,赫尔墨特方差分量估计法、将相对权比当做未知数同模型参数一同反演的方法以及单一反演方法都是两步法的特例;其优点是可以获得观测数据合理权阵,同时使得顾及相对权比的联合反演目标函数取得最小值,并对各类观测数据进行归一化。

当不同源数据出现量纲不一致情况时,首先需要对多源数据进行无量纲化处理,常用的方法为  $[f_i^{obs} - F_i(m)]/f_i^{obs}$  或  $[f_i^{obs} - F_i(m)]/\sigma_{f_i}^0$ , 其中  $f_i^{obs}$  为观测数据,  $F_i(m)$  为各自模型拟合的观测值,  $\sigma_{f_i}^0$  为观测数据的标准差,下标  $i$  表示第  $i$  类数据<sup>[10]</sup>。

### 3 算例及分析

#### 3.1 算例

在假定介质均匀且邻近测点间应变均匀的情况下,可以建立邻近点间相对形变量与地壳应变张量的线性关系<sup>[16]</sup>。设监测网第  $j$  点两期纵坐标位移为  $u_j$ ,横坐标位移为  $v_j$ ,网中共有  $m$  点,则由坐标位移反演应变参数的公式(二维)为<sup>[17]</sup>

$$\left. \begin{aligned} u_j &= x_j \epsilon_x + y_j \epsilon_{xy} - y_j \omega \\ v_j &= x_j \epsilon_{xy} + y_j \epsilon_y - x_j \omega \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中,  $x_j, y_j (j=1,2,\dots,m)$  为第  $j$  点近似坐标;  $\omega$  为其转动量;  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  为应变状态参数,且  $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$ 。

利用该应变参数反演模型模拟生成了反演应变参数的 GPS 坐标位移数据和边角网平差后的坐标位移数据( $u_1, v_1$ )和( $u_2, v_2$ ),并对两类观测资料分别施加了  $\sigma^2 = 0.5 \text{ mm}^2$  和  $\sigma^2 = 1.0 \text{ mm}^2$  的随机噪声后的数据为( $u'_1, v'_1$ )和( $u'_2, v'_2$ )。具体见表 1 和表 2,相应的坐标位移协因数阵数据分别

见表 3 和表 4。

表 1 GPS 坐标数据及坐标位移观测值数据

Tab. 1 Coordinate and displacement observation of GPS stations

序号	X/m	Y/m	$u_1/\text{mm}$	$v_1/\text{mm}$	$u'_1/\text{mm}$	$v'_1/\text{mm}$
1	100.000	100.000	1.000	20.200	0.783 7	19.367 2
2	100.000	300.000	-1.000	18.600	-0.937 3	18.743 8
3	100.000	500.000	-3.000	17.000	-3.573 2	17.595 5
4	300.000	100.000	5.000	62.200	5.594 6	62.181 2
5	300.000	300.000	3.000	60.600	3.163 6	60.687 3
6	300.000	500.000	1.000	59.000	0.906 6	59.362 9
7	500.000	100.000	9.000	104.200	8.705 8	105.291 6
8	500.000	300.000	7.000	102.600	6.931 8	102.657 0
9	500.000	500.000	5.000	101.000	5.533 4	101.029 6

表 2 边角网的坐标数据及坐标位移观测值数据

Tab. 2 Coordinate and displacement observation of side-angle network

序号	X/m	Y/m	$u_2/\text{mm}$	$v_2/\text{mm}$	$u'_2/\text{mm}$	$v'_2/\text{mm}$
1	100.000	100.000	1.000	20.200	0.567 4	18.534 4
2	100.000	600.000	-4.000	16.200	-3.874 7	16.487 7
3	600.000	100.000	11.000	125.200	9.853 5	126.390 9
4	600.000	600.000	6.000	121.200	7.189 2	121.162 4

为了比较本文提出的确定线性联合反演模型相对权比的两步法与其他方法之间的优缺点,利用模拟数据进行了计算,分以下 10 个方案进行,  $\lambda$  表示 GPS 坐标位移在联合反演中所占的比重。方案 1:GPS 坐标位移的单一反演;方案 2:边角网平差坐标位移的单一反演;方案 3:  $\lambda=0.5$ ;方案 4:  $(1-\lambda)/\lambda = \sigma_{0_1}^2/\sigma_{0_2}^2, \lambda=0.666 7$ ;方案 5:以  $\Phi = \lambda \mathbf{V}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{V}_1 + (1-\lambda) \mathbf{V}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{V}_2 = \min$ , 把  $\lambda$  当做未知数同模型参数一同进行反演;方案 6:赫尔墨特方差分量估计法<sup>[4]</sup>,迭代终止的条件为两类数据单位权方差估值之差小于等于 0.000 1;为了比较两步法中第 2 步的目标函数  $\bar{\Phi}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$  (式(10)所示)的不同对确定相对权比的影响,分别计算了以  $\bar{\Phi}_1(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_1^T \hat{\mathbf{P}}_1 \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2^T \hat{\mathbf{P}}_2 \mathbf{V}_2 = \min, \bar{\Phi}_2(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_1^T \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2^T \mathbf{V}_2 = \min, \bar{\Phi}_3(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \tau \mathbf{V}_1^T \hat{\mathbf{P}}_1 \mathbf{V}_1 + (1-\tau) \mathbf{V}_2^T \hat{\mathbf{P}}_2 \mathbf{V}_2 = \min$  以及  $\bar{\Phi}_4(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \sum |\mathbf{V}_1| + \sum |\mathbf{V}_2| = \min$  为目标函数确定相对权比的两步法,分别称为方案 7、方案 8、方案 9 和方案 10,迭代计算时  $\tau$  步长取为 0.000 1;为便于阅读将各方案的所用方法列于表 5 中。

各方案应变参数反演结果见表 6。

表 3 GPS 坐标位移协因数阵数据

Tab.3 Cofactor matrix of GPS coordinate displacement

	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$	$u_4$	$v_4$	$u_5$	$v_5$	$u_6$	$v_6$	$u_7$	$v_7$	$u_8$	$v_8$	$u_9$	$v_9$
$u_1$	9.2	2.1	-1.6	2.8	-1.9	3.2	3.7	-2.6	3.1	4.7	6.3	4.1	-1.6	5.4	2.9	-1.1	2.9	-1.8
$v_1$	2.1	8.6	4.7	-1.9	4.2	3.5	7.8	-1.1	-2.7	5.3	4.8	-1.2	5.7	3.9	3.7	4.6	3.4	5.1
$u_2$	-1.6	4.7	10.7	5.8	3.9	4.1	6.2	4.3	-1.4	3.8	1.9	3.9	2.8	4.2	-1.5	6.3	-1.1	3.6
$v_2$	2.8	-1.9	5.8	9.8	3.3	-1.8	4.1	5.2	2.2	2.9	4.6	-1.5	3.9	2.6	4.3	6.6	-1.4	3.9
$u_3$	-1.9	4.2	3.9	3.3	11.4	3.5	-2.8	3.0	2.7	4.3	6.0	4.3	-1.1	2.7	-1.7	3.3	2.7	4.0
$v_3$	8.2	3.5	4.1	-1.8	3.5	10.7	4.2	-1.3	5.1	2.7	6.2	-1.3	-1.5	3.7	4.1	6.3	-1.3	4.5
$u_4$	3.7	7.8	6.2	4.1	-2.8	4.2	9.9	-1.8	-1.2	4.6	3.9	5.1	-2.7	7.1	4.6	2.9	4.2	3.4
$v_4$	-2.6	-1.1	4.3	5.2	3.0	-1.3	-1.8	8.3	3.8	2.7	4.8	-1.7	-1.3	3.8	-1.5	3.4	2.7	-1.9
$u_5$	3.1	-2.7	-1.4	2.2	2.7	5.1	-1.2	3.8	10.6	3.2	-1.1	-1.3	-1.9	4.7	5.9	2.8	4.6	-1.1
$v_5$	4.7	5.3	3.8	2.9	4.3	2.7	4.6	2.7	3.2	9.9	1.6	2.3	-1.0	2.4	2.7	-1.1	2.0	1.6
$u_6$	6.3	4.8	1.9	4.6	6.0	6.2	3.9	4.8	-1.1	1.6	8.2	-2.7	-1.1	2.7	1.8	3.0	-1.1	3.7
$v_6$	4.1	-1.2	3.9	-1.5	4.3	-1.3	5.1	-1.7	-1.3	2.3	-2.7	10.4	1.9	-1.4	5.0	4.3	3.7	2.9
$u_7$	-1.6	5.7	2.8	3.9	-1.1	-1.5	-2.7	-1.3	-1.9	-1.0	-1.1	1.9	9.6	-2.3	3.0	2.9	4.1	-1.7
$v_7$	5.4	3.9	4.2	2.6	2.7	3.7	7.1	3.8	4.7	2.4	2.7	-1.4	-2.3	8.8	-1.7	4.6	-2.7	3.6
$u_8$	2.9	3.7	-1.5	4.3	-1.7	4.1	4.6	-1.5	5.9	2.7	1.8	5.0	3.0	-1.7	8.4	-1.1	2.7	3.7
$v_8$	-1.1	4.6	6.3	6.6	3.3	6.3	2.9	3.4	2.8	-1.1	3.0	4.3	2.9	4.6	-1.1	9.6	-1.1	2.9
$u_9$	2.9	3.4	-1.1	-1.4	2.7	-1.3	4.2	2.7	4.6	2.0	-1.1	3.7	4.1	-2.7	2.7	-1.1	10.2	-1.5
$v_9$	-2.8	5.1	3.6	3.9	4.0	4.5	3.4	-1.9	-1.1	1.6	3.7	2.9	-1.7	3.6	3.7	2.9	-1.5	8.0

表 4 边角网平差后坐标位移的协因数阵数据

Tab.4 Cofactor matrix of side-angle network coordinate displacement after adjustment

	$u_1$	$v_1$	$u_2$	$v_2$	$u_3$	$v_3$	$u_4$	$v_4$
$u_1$	19.2	6.1	-2.6	4.8	-2.9	5.2	3.7	-2.9
$v_1$	6.1	18.6	4.7	-3.9	5.2	6.5	-3.8	5.1
$u_2$	-2.6	4.7	16.7	5.8	-3.9	4.1	6.2	-4.3
$v_2$	4.8	-3.9	5.8	15.8	6.3	-3.8	4.4	5.2
$u_3$	-2.9	5.2	-3.9	6.3	17.4	3.5	-2.8	3.0
$v_3$	5.2	6.5	4.1	-3.8	3.5	18.7	4.2	-1.3
$u_4$	3.7	-3.8	6.2	4.4	-2.8	4.2	16.9	-1.8
$v_4$	-2.9	5.1	-4.3	5.2	3.0	-1.3	-1.8	18.3

表 5 各方案所用方法列

Tab.5 The method of each project

方案	方法
1	$\lambda=1$
2	$\lambda=0$
3	$\lambda=0.5$
4	$(1-\lambda)/\lambda=\sigma_{01}^2/\sigma_{02}^2$ , 即 $\lambda=0.6667$
5	以 $\Phi=\lambda V_1^T P_1 V_1+(1-\lambda)V_2^T P_2 V_2=\min$ 为目标函数确定相对权比, 以式(4)求参数
6	赫尔墨特方差分量估计法
7	$\bar{\Phi}_1(V_1, V_2)=V_1^T \hat{P}_1 V_1+V_2^T \hat{P}_2 V_2=\min$ (两步法)
8	$\bar{\Phi}_2(V_1, V_2)=V_1^T V_1+V_2^T V_2=\min$ (两步法)
9	$\bar{\Phi}_3(V_1, V_2)=\tau V_1^T \hat{P}_1 V_1+(1-\tau)V_2^T \hat{P}_2 V_2=\min$ (两步法)
10	$\bar{\Phi}_4(V_1, V_2)=\sum  V_1 +\sum  V_2 =\min$ (两步法)

表 6 应变参数反演结果

Tab.6 Inversion results of model parameters

	$\epsilon_x(\times 10^{-6})$	$\epsilon_y(\times 10^{-6})$	$\epsilon_{xy}(\times 10^{-6})$	$\omega(\times 10^{-6})$	$\ \Delta X\ $	$\lambda$
<b>R</b>	20.000 0±0.000 0	-8.000 0±0.000 0	100.000 0±0.000 0	110.000 0±0.000 0	—	—
1	20.787 9±0.462 4	-9.554 0±1.051 4	100.768 4±0.518 4	111.287 6±0.495 5	2.298 7	1.000 0
2	19.429 8±1.987 4	-8.731 8±1.613 5	101.002 7±1.158 1	108.925 8±1.105 6	1.737 8	0.000 0
3	19.584 7±0.682 6	-8.874 4±0.772 5	100.962 3±0.453 0	109.478 7±0.504 7	1.461 1	0.500 0
4	19.780 2±0.982 9	-8.969 2±1.287 5	100.916 9±0.712 6	109.816 9±0.804 1	1.364 5	0.666 7
5	20.787 4±1.393 2	-9.553 5±3.167 0	100.768 4±1.561 5	111.286 8±1.492 7	2.297 7	0.999 9
6	20.556 9±0.438 4	-9.380 0±0.876 6	100.779 5±0.439 4	110.960 9±0.445 9	1.935 3	0.955 1
7	20.556 9±0.438 4	-9.380 0±0.876 6	100.779 5±0.439 4	110.960 9±0.445 9	1.935 3	0.955 1
8	20.177 1±0.531 8	-9.160 7±0.871 8	100.834 7±0.453 1	110.417 7±0.494 2	1.499 9	0.851 7
10	20.350 3±0.758 1	-9.253 7±1.359 8	100.805 5±0.694 0	110.667 1±0.735 3	1.669 9	0.904 5

由于方案 9 与方案 2 等价, 因此, 表 6 中没有列出方案 9 的计算结果, 由方案 7、方案 8、方案 9

和方案 10 的两步法计算出来的相对权比  $\tau$  分别为 0.500 0、0.212 7、0(不加  $0<\tau<1$  的限制, 允

许取值 0 和 1)和 0.308 2。根据式(11)将对应于  $\hat{P}_i(i=1,2)$  的相对权比  $\tau$  转换成对应于式(1)中  $P_i(i=1,2)$  的相对权比  $\lambda$  分别为 0.955 1、0.851 7、0 和 0.904 5(如表 6 所示);  $\|\Delta X\|$  表示模型参数反演结果与真值差值的范数; $R$  表示参数的真值。然后,本文绘制了方案 5、方案 7、方案 8、方案 9 和方案 10 的目标函数与相对权比之间的关系图,如图 1 所示。

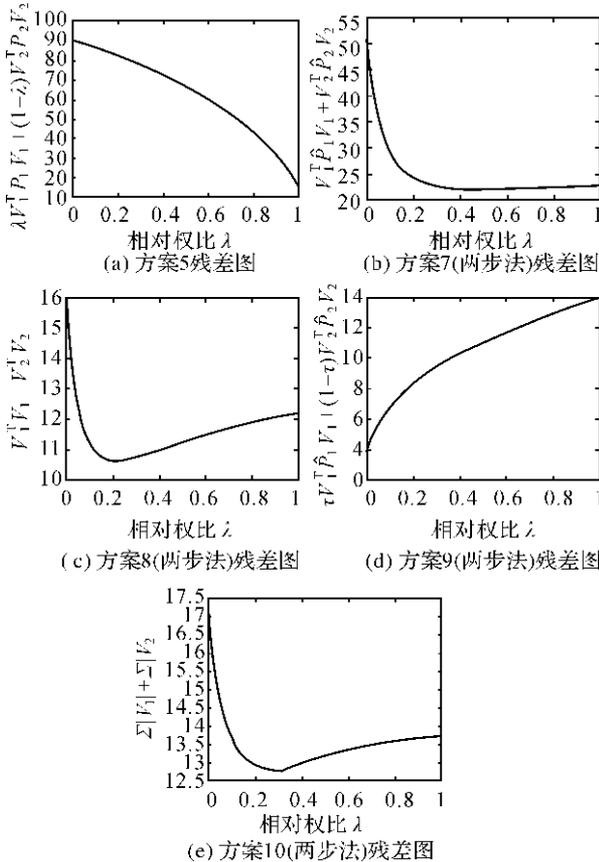


图 1 各方案残差图

Fig. 1 Residual graphs of some projects

### 3.2 结果分析

(1) 对于反演结果的评价一般要从内符合精度和外符合精度两个方面进行综合考虑。本文参数估值的中误差是反演结果的内符合精度指标,反演结果与真值的差值范数  $\|\Delta X\|$  作为外符合精度指标。整体上从内符合精度来看,方案 6 和方案 7 的结果最优,而且二者是等价的。从外符合精度来看,方案 4 的差值范数最小,这与理论相符,因为给定的权比即为实际权比。然而这种方法不具操作性,因为在反演之前两类数据的验前单位权方差是很难准确知道的;方案 3 虽然外符合精度较高,但是内符合精度稍差;方案 5 的结果

与方案 1 几乎相同,若不加  $0 < \lambda < 1$  的限制允许取值 0 和 1,则方案 5 与方案 1 是等价的;方案 8 具有较高的外符合和内符合精度;方案 10 具有较高的外符合精度,但内符合精度较差;方案 9 与方案 2 等价,为边角网坐标位移的单一反演。综合起来看,当观测值不含粗差时,两步法(除方案 10 外)可以得到较好的反演结果。

(2) 验前单位权方差法(方案 4)的主要缺点是反演结果与给予的验前(初始)单位权方差有着很大的关系。验前单位权方差给的准确,则可以得到较好的结果(如本文的算例),若初始单位权方差不准确,就会得到不好的结果<sup>[2,4]</sup>。赫尔墨特方差分量估计法(方案 6)的主要优点是得到的结果具有最优无偏的特性,不会受到验前单位权方差不准确的限制。两步法是一种概括反演方法,赫尔墨特方差分量估计法(方案 6)以及单一反演方法(方案 2)等都是两步法的特例。两步法通过目标函数  $\bar{\Phi}(V_1, V_2)$  的选择统一了这些常用的方法。两步法同样不会受到验前单位权方差不准确的限制,可以获得观测数据合理权阵,同时使得顾及相对权比的联合反演目标函数取得最小值,并对各类观测数据进行了归一化。由图 1 可以看出,两步法的第 2 步采用不同的目标函数确定相对权比的结果是不同的。两步法目标函数  $\bar{\Phi}(V_1, V_2)$  的选取方法为,观测值仅含偶然误差时,若要获得最优无偏的反演结果,则选  $\bar{\Phi}_1(V_1, V_2)$  为目标函数;相对权比和模型参数都当做未知数同时计算时,可选  $\bar{\Phi}_2(V_1, V_2)$  为目标函数;相对权比和模型参数都当做未知数同时计算时,不可选  $\bar{\Phi}_3(V_1, V_2)$  作为目标函数,否则变成单一反演。因此,目标函数的选择可以根据实际情况确定。

(3) 由残差图 1(a)(方案 5)和图 1(d)(方案 4)可以看出,  $\lambda V_1^T P_1 V_1 + (1-\lambda) V_2^T P_2 V_2$  与相对权比  $\lambda$  以及  $\tau V_1^T \hat{P}_1 V_1 + (1-\tau) V_2^T \hat{P}_2 V_2$  与相对权比  $\tau$  之间是成递减或递增的关系,因此当以此类目标函数作为确定相对权比的标准,且将其当做未知数与模型参数一同进行求解时,得到相对权比的值为 1 或者 0,如文献<sup>[4]</sup>中的  $\lambda=1$ 。

(4) 联合反演中相对权比的大小虽然是由所用的方法确定的,但并不能以得到的相对权比的大小作为评价确定相对权比方法好坏的标准。无论采用何种方法确定相对权比,一般精度较高、数目较多的一类观测值应该在联合反演中起主要作用,该观测值的相对权比也较大,如本文算例中的

GPS 观测数据。

相对权比的确定是联合反演中的关键问题。本文提出的确定联合反演中相对权比的两步法是一种概括反演方法,其优点是不受验前单位权方差的限制,可以获得观测数据的合理权阵,同时使得顾及相对权比的联合反演目标函数取得最小值,并对各类观测数据进行了归一化。模拟数据的计算,显示了在处理线性联合反演问题时该方法是非常有效的。但是,两步法还需要在实际应用中进一步验证和改进。

### 参考文献:

- [1] XU Caijun, SHEN Wenbin, CHAO Dingbo. Geophysical Geodesy Principles and Methods[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2006. (许才军,申文斌,晁定波.地球物理大地测量学原理与方法[M].武汉:武汉大学出版社,2006.)
- [2] DING Kaihua. Research on Stochastic Modeling in Geodetic Joint Inversion[D]. Wuhan: Wuhan University, 2006. (丁开华.大地测量联合反演中的随机模型研究[D].武汉:武汉大学,2006.)
- [3] FU Yuning. Joint Inversion of Movement Parameters of Main Faults and Blocks in Sichuan and Yunnan Area Using GPS and Gravity Data[D]. Wuhan: Wuhan University, 2007. (富宇宁.利用GPS和重力数据联合反演川滇地区主要断层、块体的运动参数[D].武汉:武汉大学,2007.)
- [4] XU Caijun, DING Kaihua, CAI Jianqing, et al. Methods of Determining Weight Scaling Factors for Geodetic-geophysical Joint Inversion[J]. Journal of Geodynamics, 2009, 47(1): 39-46.
- [5] DU Zhixing, OU Jikun, JIN Fengxiang, et al. Optimization Inversion of the Relative Weight Ratio in the Joint Inversion Models[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2003, 32(1): 15-19. (独知行,欧吉坤,靳奉祥,等.联合反演模型中相对权比的优化反演[J].测绘学报,2003,32(1):15-19.)
- [6] XU Caijun. Progress of Joint Inversion on Geodesy and Geophysics[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2001, 26(6): 555-561. (许才军.大地测量联合反演理论和方法研究进展[J].武汉大学学报:信息科学版,2001,26(6):555-561.)
- [7] FU Yuning, XU Caijun. On Relative Weight Problem in Joint Inversion Using Levelling and Gravity Data [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2007, 27(2): 68-74. (富宇宁,许才军.水平和重力资料联合反演中权问题的研究[J].大地测量与地球动力学,2007,27(2):68-74.)
- [8] LI Shuang. Research on Models and Algorithms of Geodesy and Geophysics Joint Inversion[D]. Wuhan: Wuhan University, 2005. (李爽.大地测量联合反演的模式及算法研究[D].武汉:武汉大学,2005.)
- [9] DING Kaihua, XU Caijun. Current Crustal Strain Field in the Sichuan-Yunnan Area by Joint Inversion of GPS and Seismic Moment Tensor[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2009, 34(3): 265-268. (丁开华,许才军.川滇地区地壳应变场的GPS与地震矩张量联合反演研究[J].武汉大学学报:信息科学版,2009,34(3):265-268.)
- [10] ZHAO Shaorong. Joint Inversion of Observed Gravity and GPS Baseline Changes for the Detection of the Active Fault Segment at the Red River Fault Zone[J]. Geophysical Journal International, 1995, 122(1): 70-88.
- [11] XU Caijun, WANG Leyang. Progress of Joint Inversion of Geodetic and Seismological Data for Seismic Source Rupture Process[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2010, 35(4): 457-462. (许才军,王乐洋.大地测量和地震资料联合反演地震震源破裂过程研究进展[J].武汉大学学报:信息科学版,2010,35(4):457-462.)
- [12] WANG Leyang, XU Caijun. Comparative Research on Equality Constraint Inversion and Joint Inversion [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2009, 29(1): 74-78. (王乐洋,许才军.等式约束反演与联合反演的对比研究[J].大地测量与地球动力学,2009,29(1):74-78.)
- [13] XU Caijun, LIU Yang, WEN Yangmao, et al. Coseismic Slip Distribution of the 2008 Mw 7.9 Wenchuan Earthquake from Joint Inversion of GPS and InSAR Data[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 2010, 100(5B): 2736-2749.
- [14] LIU Chongbing, NING Jinsheng, ZHANG Yushen. Method for Joint Inversion of Seismic Surface Waves and Gravity Data for Three Dimensional Density Structure[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1999, 28(2): 103-109. (刘崇兵,宁津生,张禹慎.利用地震面波和重力资料联合反演地壳-上地幔三维密度结构的方法探讨[J].测绘学报,1999,28(2):103-109.)
- [15] CUI Xizhang, YU Zongchou, TAO Benzao, et al. Generalized Surveying Adjustment[M]. New ed. Wuhan: Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Press, 2001. (崔希璋,于宗侗,陶本藻,等.广义测量平差[M].新版.武汉:武汉测绘科技大学出版社,2001.)
- [16] TAO Benzao. Robust Homogeneous Analysis of Displacement-Strain Models[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2000, 29(4): 293-296. (陶本藻.位移-应变模型的稳健均匀分析[J].测绘学报,2000,29(4):293-296.)
- [17] CHEN Jian, TAO Benzao. Geodetic Deformation Surveying [M]. Beijing: Earthquake Publishing House, 1987. (陈健,陶本藻.大地形变测量学[M].北京:地震出版社,1987.)

(责任编辑:丛树平)

收稿日期:2011-01-10

修回日期:2011-07-28

第一作者简介:王乐洋(1983—),男,博士,讲师,主要研究方向为大地测量反演及大地测量数据处理。

First author: WANG Leyang (1983—), male, PhD, lecturer, majors in geodetic inversion and geodetic data processing.

E-mail: wleyang@163.com