

ZHU Guangbin, LI Jiancheng, WEN Hanjiang, et al. Slepian Localized Spectral Analysis of the Determination of the Earth's Gravity Field Using Satellite Gravity Gradiometry Data[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(1): 1-7. (朱广彬, 李建成, 文汉江, 等. 卫星重力梯度数据确定地球重力场的 Slepian 局部谱分析方法[J]. 测绘学报, 2012, 41(1): 1-7.)

卫星重力梯度数据确定地球重力场的 Slepian 局部谱分析方法

朱广彬¹, 李建成², 文汉江³, 常晓涛¹, 王正涛², 邹贤才²

1. 国家测绘地理信息局 卫星测绘应用中心, 北京 100830; 2. 武汉大学 测绘学院, 湖北 武汉 430079; 3. 中国测绘科学研究院, 北京 100830

Slepian Localized Spectral Analysis of the Determination of the Earth's Gravity Field Using Satellite Gravity Gradiometry Data

ZHU Guangbin¹, LI Jiancheng², WEN Hanjiang³, CHANG Xiaotao¹, WANG Zhengtao², ZOU Xiancai²

1. Satellite Surveying and Mapping Application Center, National Administration of Surveying, Mapping and Geoinformation, Beijing 100830, China; 2. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China; 3. Chinese Academy of Surveying and Mapping, Beijing 100830, China

Abstract: The Slepian localized spectral analysis method is introduced and its mathematical characteristics are analyzed. Grünbaum operator is introduced to improve the computational efficiency and stability. Then, the formulas of Slepian method for recovering the gravity field with satellite gravity gradiometry data are deduced and numerical analysis are done. The results show that, Slepian function is orthogonal in both the sphere and the belt, and its spectral energy distribution characteristic is in accord with the orbit characteristic. Also, the accuracy of low order coefficients in Slepian domain is less influenced by polar gaps than that in spherical harmonic domain. However, the direct contribution of Slepian method to the improvement of geoid is limited.

Key words: satellite gravity gradiometry; gravity field; Slepian localized spectral analysis; polar gaps; surface spherical harmonics; Slepian function

摘要: 在引入 Slepian 局部谱分析方法的基础上, 详细分析 Slepian 函数的数学特性, 采用 Grünbaum 算子提高 Slepian 方法求解的稳定性和效率, 推导卫星重力梯度数据确定地球重力场的 Slepian 方法表达式。通过仿真分析, 就 Slepian 方法在卫星重力梯度数据确定地球重力位模型中的应用和前景进行分析和讨论。研究表明, Slepian 函数在整个球面和球带上具有双正交性, 其频谱能量分布特性与卫星轨道的测量特点具有很好的一致性。Slepian 低次项系数精度受到极空白影响很小, 较之球谐系数低次项明显改善。Slepian 方法对大地水准面空间分布恢复精度的直接贡献不明显。

关键词: 卫星重力梯度; 重力场; Slepian 局部谱分析; 极空白; 面球谐函数; Slepian 函数

中图分类号: P223

文献标识码: A

文章编号: 1001-1595(2012)01-0001-07

基金项目: 国家 863 计划(2007AA12Z346); 国家自然科学基金(40874012; 40974016; 41004007)

1 引言

随着空间技术的发展, 利用卫星重力技术获取地球重力场精细结构的探测方法得到了不断发展。CHAMP (challenging mini-satellite payload)、GRACE (gravity recovery and climate experiment) 以及 GOCE (gravity field and steady-state ocean circulation explorer)^[1-3] 卫星任务就是此技术背景下的产物。全球重力位模型可以用球谐系数进行表达, 可以看做是观测数据以面球谐函数为基函数在球面上的正交展开。这就需要覆盖全球的重力场数据, 即卫星以极轨飞行, 否则

面球谐函数将不满足其球面正交的特性。但是由于各种工程技术问题, 目前的卫星任务均是以近极轨飞行, 这就带来了地球两极各有一个小的数据空白区域, 也就是极空白问题。

极空白问题导致了在地球重力位模型的解算中, 低次球谐系数的估计精度较低^[4]。目前解决极空白问题的方案, 一是利用已有的重力位模型、航空和地面等重力数据对极空白区域进行数据填充^[5], 使其满足球谐系数的正交性, 但这会带来先验信息的引入; 二是利用数理统计方法降低或消除极空白问题的影响, 包括正则化方法等^[6-8]; 三是对原有基函数的非正交特性进行数学处理或者

引入新的正交函数,从本质上解决极空白问题所带来的影响,包括 Cholesky 分解、特征值分析、Gram 矩阵法等正交处理策略以及 Slepian^[9]局部谱分析方法等^[10-14]。

本文推导利用卫星重力梯度数据反演地球位模型的 Slepian 局部谱分析方法表达式,研究 Slepian 函数的数学特性。在此基础上,利用卫星重力梯度模拟数据分析 Slepian 方法在求解地球重力位模型中的优点和不足。

2 Slepian 方法的引入与求解

地球重力场量 $y(\mathbf{r})$ (\mathbf{r} 表示坐标向量)在频域上是具有无限带宽的,但是在进行参数估计时,仅仅能获得一定带宽内的估计值,即估计量是具有频域带限特征的。构建一种新的带限基函数 $g(\mathbf{r})$,表示为面球谐函数的线性组合形式

$$g(\mathbf{r}) = \sum_{nm} g_{nm} \bar{Y}_{nm} \quad (1)$$

式中, g_{nm} 为待求系数。

地球重力场量的带限估计值可以写为

$$\hat{y}(\mathbf{r}) = \sum_{nm=0}^N \hat{u}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^{(N+1)^2} \hat{s}_a g_a(\mathbf{r}) \quad (2)$$

式中, \hat{u}_{nm} 为球谐系数估计值, n, m 分别为阶数和次数; $g_a(\mathbf{r})$ 为新的带限基函数组; \hat{s}_a 为相应的系数估计值; $\bar{Y}_{nm}(\mathbf{r})$ 为面球谐函数,满足正交特性

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \bar{Y}_{nm} \bar{Y}_{n'm'} d\Omega = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (3)$$

式中, Ω 代表整个球面; δ 为 Kronecker 符号。

在利用卫星观测数据求解地球重力位模型的过程中,两极数据空白带来了面球谐函数的不正交问题。如果新的带限函数能最大限度地获取球面中带 $B = \{\theta; \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0\}$ (θ_0 为极空白球冠的余纬半径,对应于 GOCE 任务,约为 6.7°) 上的观测信息,即在球面上具有局部最优特性,则该问题可以得到较为圆满的解决。为此,令新的带限函数的频谱能量在球带 B 上最大,即

$$\lambda = \frac{\iint_B g^2(\mathbf{r}) dB}{\iint_{\Omega} g^2(\mathbf{r}) d\Omega} = \max \quad (4)$$

此即所谓的 Slepian 问题^[9, 12-14]。

在 Slepian 问题中,比值 $0 < \lambda < 1$ 作为频域带限函数 $g(\mathbf{r})$ 空域集中度的一种度量。联合式(1)、式(3)、式(4),可将 Slepian 问题转化为

$N+1$ 个 $(N-m+1) \times (N-m+1)$ 维实特征值问题^[13-14]

$$\mathbf{D}_m \mathbf{g}^m = \lambda_m \mathbf{g}^m \quad 0 \leq m \leq N \quad (5)$$

$$\mathbf{D}_m = \left. \begin{array}{ccc} D_{mm} & \cdots & D_{mN} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{Nm} & \cdots & D_{NN} \end{array} \right\} \quad (6)$$

$$\mathbf{g}^m = [g_{mm} \quad \cdots \quad g_{Nm}]^T$$

式中,矩阵元素利用式(7)计算^[7,15]

$$D_{mm'} = \frac{1}{4\pi} \iint_B \bar{Y}_{nm} \bar{Y}_{n'm'} d\Omega =$$

$$\frac{1 + \delta_{m0}}{4} \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} \bar{P}_{nm} \bar{P}_{n'm'} \sin \theta d\theta =$$

$$\frac{1 + \delta_{m0}}{4} \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{n'} a_{mk_1} a_{n'k_2}$$

$$\int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} \left. \begin{array}{l} \cos(k_1 \theta) \cos(k_2 \theta) \quad m \text{ 为偶数} \\ \sin(k_1 \theta) \sin(k_2 \theta) \quad m \text{ 为奇数} \end{array} \right\} \sin \theta d\theta \quad (7)$$

$$a_{mk} = (2 - \delta_{k0}) \bar{F}_{mk} \left(\frac{\pi}{2} \right) \left. \begin{array}{l} (-1)^{E[\frac{k}{2}]} \quad m \text{ 为偶数} \\ (-1)^{E[\frac{k-1}{2}]} \quad m \text{ 为奇数} \end{array} \right\} \quad (8)$$

式中, \bar{F}_{mk} 为倾角函数; $E[\cdot]$ 代表取整算子。

对每一个特征值问题,将特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{(N-m+1)}$ 和相应的特征向量 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{(N-m+1)}$ 按照 $1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{(N-m+1)} > 0$ 进行排序,由于不存在能量完全集中于球带 B 上的带限基函数,故最大特征值 λ_1 非常接近于 1 但不等于 1。同样,矩阵 \mathbf{D}_m 的正定性保证了最小特征值 $\lambda_{(N-m+1)}$ 非常接近于零但不等于零。相应的带限函数 $g_1(\mathbf{r}), g_2(\mathbf{r}), \dots, g_{(N-m+1)}(\mathbf{r})$ 满足双正交性

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} g_a(\mathbf{r}) g_b(\mathbf{r}) d\Omega = \delta_{ab} \\ \frac{1}{4\pi} \iint_B g_a(\mathbf{r}) g_b(\mathbf{r}) d\Omega = \lambda_a \delta_{ab} \end{array} \right\} \quad (9)$$

则对应于次数为 m 的带限 Slepian 函数 $s_j^m(\mathbf{r})$ 即为

$$s_j^m(\mathbf{r}) = \sum_{n=m}^N g_{nm} \bar{Y}_{nm} \quad m \leq j \leq N \quad (10)$$

写成矩阵形式为

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{G}_m^T \bar{\mathbf{Y}}_m \quad (11)$$

Slepian 函数在整个球面和球带上均是正交的,其本质可看做是同次面球谐函数的线性组合形式,次数 m 对于 Slepian 函数和面球谐函数具有相同意义。

3 Slepian 函数的性质

Slepian 函数中,在球带 B 上能量较大的特征函数 $g_\alpha(r)$ 所对应的特征值 λ_α 接近于 1,称之为有效特征值;而在球带 B 上能量较小的特征函数的特征值 λ_α 则接近于零,称之为无效特征值。这些特征值的大小反映了其所对应的特征向量的能量大小。与最大特征值相对应的基函数 $g_1(r)$ 是在球带 B 上能量最大的带限函数, $g_2(r)$ 则是仅次于 $g_1(r)$ 且与其正交的在球带 B 上能量最大的带限函数,依此类推。当极空白区域较小时,有效特征值较多,无效特征值相对很少,反之亦然。图 1 给出了 $N=100, \theta_0=6.7^\circ$ 时的特征函数 $g_\alpha(r)$ 的特征值分布。图中显示,由于极空白区域很小,绝大多数的特征值均接近于 1,仅有小部分的特征值接近于零,而位于这两种情况中间的过渡带相对较短,仅有极少数特征值。

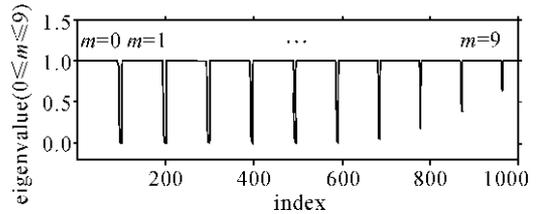


图 1 Slepian 函数的特征值分布

fig. 1 The distribution of Slepian function eigenvalues

图 2 给出了 $N=18$ 、极空白半径 $\theta_0=40^\circ$ 、次数 $0 \leq m \leq 3$ 时的能量占前 3 位和后 3 位的 Slepian 函数纬向分布图(不考虑经向变化)。特征值截至小数点后 6 位。具有最大权重($\lambda \approx 1$)的前 3 位特征函数中,能量非常好地集中于 $40^\circ \leq \theta \leq 140^\circ$ 的范围上,在其他区域上则基本为零。相反的,具有最小权重($\lambda \approx 0$)的前 3 位特征函数中,能量非常好地集中于 $0^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ 以及 $140^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 的范围上。通过这种分布, Slepian 函数实现了将卫星观测信息最大化地聚集在非极空白区域,即保证了卫星轨道的测量特点与数据处理方法的一致性。

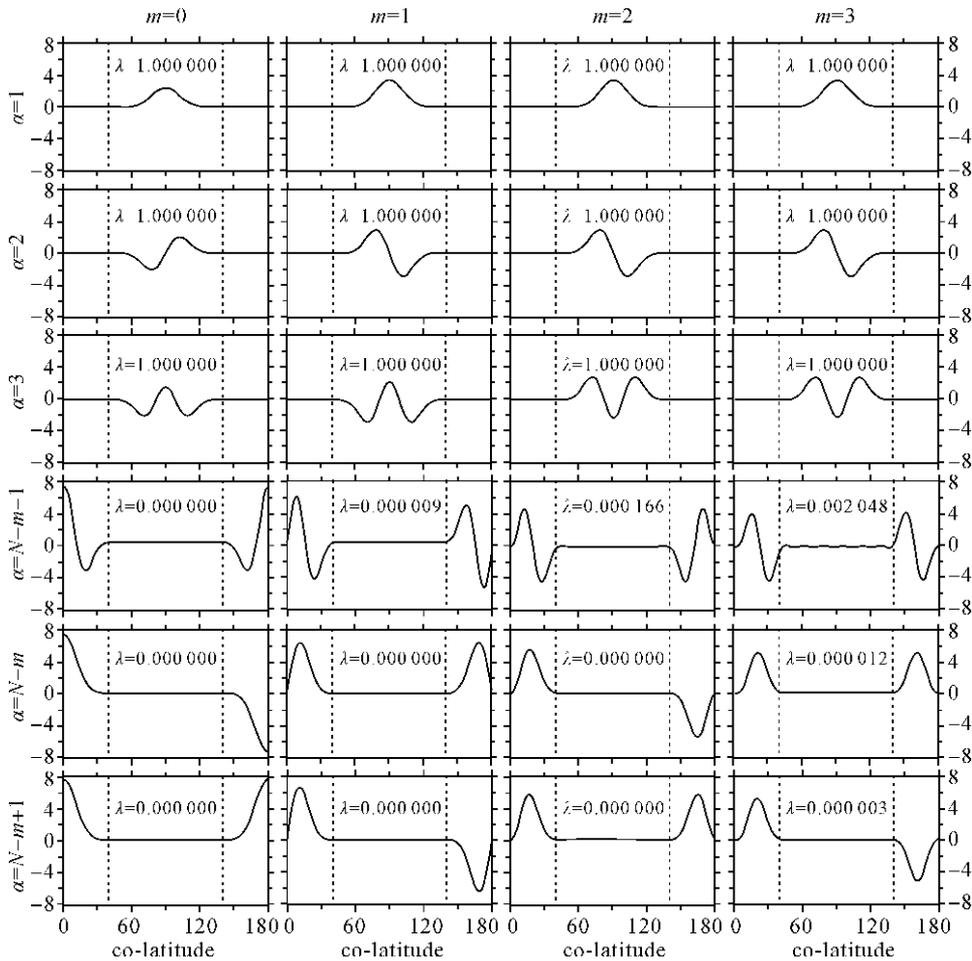


图 2 前 3 位和后 3 位特征函数纬向变化图

Fig. 2 Co-latitude dependence of the first three and last three eigenfunctions

此外,从图 2 可以观察到,当 α 为奇数时,特征函数为一以赤道为对称轴的偶函数;当 α 为偶数时,特征函数为一奇函数。当 m 为偶数时,具有最小权重的特征函数的奇偶性与 N 的奇偶性相同;当 m 为奇数时,具有最小权重的特征函数的奇偶性与 N 的奇偶性相反。也就是说,特征函数的奇偶性与 $\alpha-m$ 的奇偶性相反。当 $\alpha=1$ 时,特征函数不具有零点;当 $\alpha=2$ 时,只有一个零点;当 $\alpha=3$ 时,特征函数有两个零点,依此类推。也就是说随着 α 的增加,特征函数的零点个数逐渐增加。

4 数值计算效率和稳定性的改进

当极空白的球冠半径较小时,式(7)的对角化运算会变得很不稳定,特征向量的求解存在不唯一性。另一方面,在求解特征值时,需要通过数值积分或者其他方法计算每一个矩阵元素,总的运算次数为 $o(N^2)$,这大大增加了运算时间。这里引入一个二阶差分算子 Grünbaum 算子^[13-14,16-17]

$$I_p = (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta) \nabla_m^2 + 2\cos \theta \sin \theta \frac{d}{d\theta} -$$

$$N_p(N_p+3)\cos^2 \theta \quad 0 \leq m \leq N \quad (12)$$

式中, $\nabla_m^2 = d^2/d\theta^2 + \cot \theta(d/d\theta) - m^2(\sin \theta)^{-2}$ 是固定次数 Laplace-Beltrami 算子; $p=e$ 代表偶数,或 $p=o$ 代表奇数。下限满足 $m_{p=e} = m$ 以及 $m_{p=o} = m+1$,上限满足

$$N_{p=e} = \begin{cases} N & N-m \text{ 为偶数} \\ N-1 & N-m \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (13)$$

$$N_{p=o} = \begin{cases} N-1 & N-m \text{ 为偶数} \\ N & N-m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

引入 $(N-m+1) \times (N-m+1)$ 矩阵 T_m , 矩阵元素为

$$T_{mm'} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \bar{Y}_{mm'}(\bar{I}Y_{n'm}) d\Omega \quad (14)$$

矩阵 D_m 与 T_m 均为对称阵,且满足 $D_m T_m = T_m D_m$,即二者为可交换矩阵。由于可交换矩阵具有相同的特征向量,故式(5)等价于特征值问题

$$\left. \begin{aligned} T_m \mathbf{g}^m &= \Lambda \mathbf{g}^m \\ \mathbf{g}^m &\in \Omega \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中, I 为 Grünbaum 算子; $\Lambda \neq \lambda$ 为相应的 Grünbaum 特征值。

Grünbaum 矩阵 T_m 可以利用下式进行计算得到^[13-14]

$$T_{mm}^p = -n(n+1)\cos^2 \theta_0 + \frac{2}{2n+3} [(n+1)^2 - m^2] +$$

$$[(n-2)(n+1) - N_p(N_p+3)] \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{3m^2 - n(n+1)}{(2n+3)(2n-1)} \right] \quad (16)$$

$$T_{mm(n+2)}^p = \frac{[n(n+3) - N_p(N_p+3)]}{2n+3} \cdot \sqrt{\frac{[(n+2)^2 - m^2][(n+1)^2 - m^2]}{(2n+1)(2n+5)}} \quad (17)$$

$$T_{mmn'}^p = 0 \quad \text{otherwise} \quad (18)$$

$T_m = \text{diag}(T_m^e, T_m^o)$ 为一三对角阵,这在很大程度上降低了计算的复杂度,另一方面,Grünbaum 算子的运用提高了数值计算的稳定性。由此实现了 Slepian 问题的稳定快速求解。

图 3 显示了采用 Grünbaum 矩阵进行求解后的 Slepian 函数的二维空间分布图(红蓝分别代表正负值)。从中可以发现,由于经向的正负交叉点与三角函数 $\sin m\lambda$ 或者 $\cos m\lambda$ 的性质有关,因此当 $m=0$ 时,经向上不存在零点; $m=\pm 1$ 时,经线上存在两个零点; $m=\pm 2$ 时,经线上存在 4 个零点,依此类推。空间分布图的纬向分布特征与图 2 的分析一致。

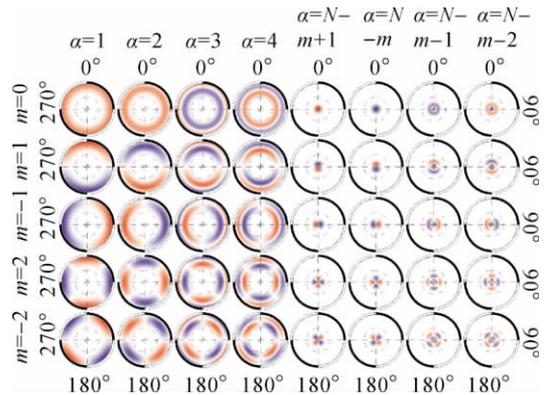


图 3 前 4 位和后 4 位特征函数的空间分布图 ($90^\circ < \theta < 180^\circ$)

Fig. 3 Spatial dependence of the first four and last four eigenfunctions ($90^\circ < \theta < 180^\circ$)

图 4 为勒让德函数和 Slepian 函数纬向空间分布图(不考虑经向变化),最高阶数为 100,次数固定为 $m=0$ 。图中可以看出,与勒让德函数的频谱分布较为均匀不同,Slepian 函数的频谱能量随着纬度增加逐渐减小,在两极地区达到最小,这种数学特性与卫星大地测量中的极空白问题符合很好。这也是引入 Slepian 函数的主要初衷。而且,频谱能量与阶数密切相关,阶数越高,能量逐渐变小甚至消失。

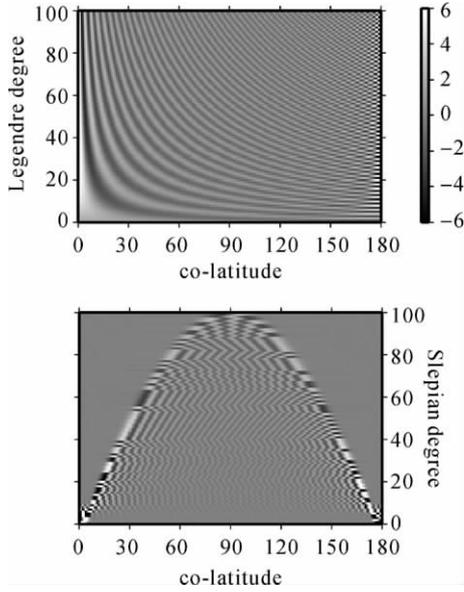


图 4 勒让德函数与 Slepian 函数的纬向频谱分布

Fig. 4 Co-latitudinal dependence of Legendre function and Slepian function

5 Slepian 方法在卫星重力梯度数据恢复地球重力场中的应用研究

5.1 引力梯度分量的 Slepian 函数表达

由式(11)可知, G_m 为解特征值问题(式(5))所得的特征向量矩阵,为一正交矩阵,故

$$\bar{Y}_m = G_m S_m \quad (19)$$

面球谐函数 $\bar{Y}_m = [\bar{Y}_{nm} \quad \bar{Y}_{m+1,m} \quad \dots \quad \bar{Y}_{N,m}]$ 的向上延拓矩阵可利用对角矩阵 $H_m(r)$ 表示^[10]

$$H_m(r) = \begin{bmatrix} \left(\frac{R}{r}\right)^{|m|+1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \left(\frac{R}{r}\right)^{N+1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

则对于平方可积空间 $L^2(\sigma)$ 内相应的线性延拓算

子 $\bar{\lambda}(r)$ 有

$$\bar{\lambda}(r) S_m = \bar{\lambda}(r) G_m^T \bar{Y}_m = G_m^T \bar{\lambda}(r) \bar{Y}_m =$$

$$G_m^T H_m(r) \bar{Y}_m = [G_m^T H_m(r) G_m] S_m \quad (21)$$

可见, Slepian 函数的延拓矩阵为非对角阵形式。

将引力位在地心球坐标系 (r, θ, λ) 下利用 Slepian 函数进行展开得到(截断至 N 阶)

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{R} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N s_{nm} (g_m^{n-|m|+1} H_m(r) \bar{Y}_m) = \\ &= \frac{GM}{R} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N s_{nm} \sum_{k=m}^N g_{km}^{n-|m|+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} \bar{Y}_{km}(\theta, \lambda) = \\ &= \frac{GM}{R} \sum_{m=0}^N \sum_{n=m}^N (s_{nm}^+ \cos m\lambda + s_{nm}^- \sin m\lambda) \cdot \\ &= \sum_{k=m}^N g_{km}^{n-|m|+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} \bar{P}_{km}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (22)$$

式中, $s_{nm} = \{s_{nm}^+, s_{nm}^-\}$ 为 Slepian 展开系数; $g_m^{n-|m|+1}$ 为对应于 m 次的第 $n - |m| + 1$ 个特征向量,由式(5)计算得到; $g_{km}^{n-|m|+1}$ 为 $g_m^{n-|m|+1}$ 的第 k 个元素。

根据引力梯度分量在地心球坐标 (r, θ, λ) 与局部指北坐标 (x, y, z) 之间的转换关系^[18], 可得到引力梯度分量的 Slepian 函数表达式(截断至 N 阶)

$$\begin{aligned} V_{ij}^S(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{R^3} \sum_{m=0}^N \sum_{n=m}^N (\alpha_{nm}^{(ij)} \cos m\lambda + \beta_{nm}^{(ij)} \sin m\lambda) \cdot \\ &= \sum_{k=m}^N g_{km}^{n-|m|+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{k+3} \lambda_k^{(ij)} H_{km}^{(ij)}(\theta) \end{aligned} \quad (23)$$

式中,符号 $\lambda_k^{(ij)}$ 、 $\alpha_{nm}^{(ij)}$ 、 $\beta_{nm}^{(ij)}$ 、 $H_{km}^{(ij)}(\theta)$ 的表达式如表 1 所示。

根据式(23)在最小二乘框架下求解即可得到 Slepian 系数

$$\hat{s}_{nm} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (24)$$

式中, P 为权阵; A 为相应的设计矩阵; l 为梯度观测值向量。

表 1 局部指北坐标系下的引力梯度分量 Slepian 函数表达式

Tab. 1 Slepian expression of gravity gradient exponents in local north-oriented coordinates

引力梯度张量	$\lambda_k^{(ij)}$	$\alpha_{nm}^{(ij)}$	$\beta_{nm}^{(ij)}$	$H_{km}^{(ij)}(\theta)$
V_{xx}^S	1	s_{nm}^+	s_{nm}^-	$-(k+1)\bar{P}_{km}(\cos \theta) + \bar{P}'_{km}(\cos \theta)$
V_{yy}^S	1	s_{nm}^+	s_{nm}^-	$-(k+1 + \frac{m^2}{\sin^2 \theta})\bar{P}_{km}(\cos \theta) + \cot \theta \bar{P}'_{km}(\cos \theta)$
V_{zz}^S	$(k+1)(k+2)$	s_{nm}^+	s_{nm}^-	$\bar{P}_{km}(\cos \theta)$
V_{xy}^S	m	s_{nm}^-	$-s_{nm}^+$	$\frac{1}{\sin \theta} \bar{P}'_{km}(\cos \theta) - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \bar{P}_{km}(\cos \theta)$
V_{xz}^S	$k+2$	s_{nm}^+	s_{nm}^-	$\bar{P}'_{km}(\cos \theta)$
V_{yz}^S	$m(k+2)$	s_{nm}^-	$-s_{nm}^+$	$\frac{1}{\sin \theta} \bar{P}_{km}(\cos \theta)$

5.2 卫星重力梯度数据恢复地球重力场的 Slepian方法仿真分析

基于德国波恩大学提供的 GOCE 卫星轨道仿真数据,利用 EIGEN-GL04C 位模型的前 300 阶模拟了 30 d、5 s 采样的卫星重力梯度观测值。利用梯度径向分量 V_{zz} ,基于空域最小二乘方法^[8, 19]进行地球重力位模型的解算。为使得模拟方案更符合 GOCE 重力位模型实际解算情况,阶数仅取至 200 阶。图 5 给出了以面球谐函数为基函数的球谐系数解的相对误差以及以 Slepian 函数为基函数的 Slepian 解的相对误差。

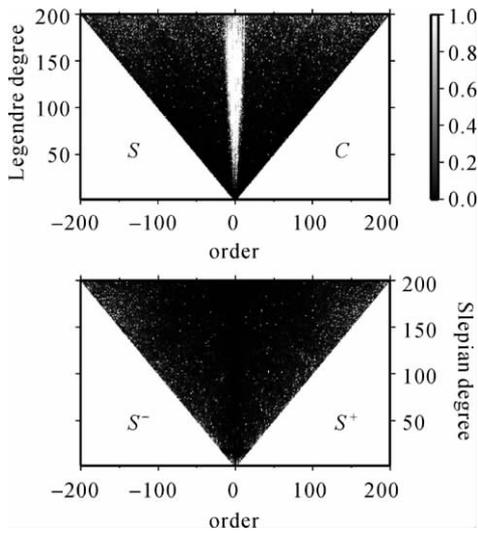


图 5 球谐解的相对误差与 Slepian 解的相对误差比较
Fig. 5 The relative errors of spherical harmonic solution and Slepian solution

从图 5 可以看出,由于混频效应的影响,球谐

系数解的低次项的估计精度较低,此外高阶项的求解精度亦受到很大影响。将求解过程转换至 Slepian 域后,求解结果明显变优。低次项的估计精度有了大幅度的提高,高阶项的求解精度也有所提高,但是扇谐项及其周围系数的精度要低一些。对于球谐系数解来讲,混频效应主要包括两部分:第 1 部分是 200 阶以上的重力场信号混叠进 200 阶以下的重力场信号引起;第 2 部分是地球重力场非极空白区域的观测信息混叠进极空白区域引起的重力场频谱的变化,由于低次勒让德函数在高纬度地区包含更多的能量信号,故而低次项球谐系数的估计精度较低^[4]。就 Slepian 系数解而言,混频效应主要是高阶项(大于 200 阶)的重力场信号混叠进低阶项所致,且主要影响 Slepian 函数的扇谐项及其周围系数。

图 6 显示了球谐系数解和 Slepian 解的空间域结果。为了便于量级上的比较,这里对低次项进行了截断。图中可以发现,Slepian 解较之球谐系数解的大地水准面误差均方差并没有明显的改善。这说明,Slepian 解对于大地水准面的求解并没有直接帮助,大地水准面精度的提高还是需要依赖于高精度的海量观测值的获取。当存在噪声时,需要借助数理统计方法,特别是正则化方法进行处理。Slepian 方法的主要贡献在于其开辟了 Slepian 频域的新范畴,且模型在该频域内的求解精度较之传统的球谐域要高。如何结合数理统计方法在 Slepian 域内对求解结果进行有效处理,以提高大地水准面的求解精度,有待进一步的研究和分析。

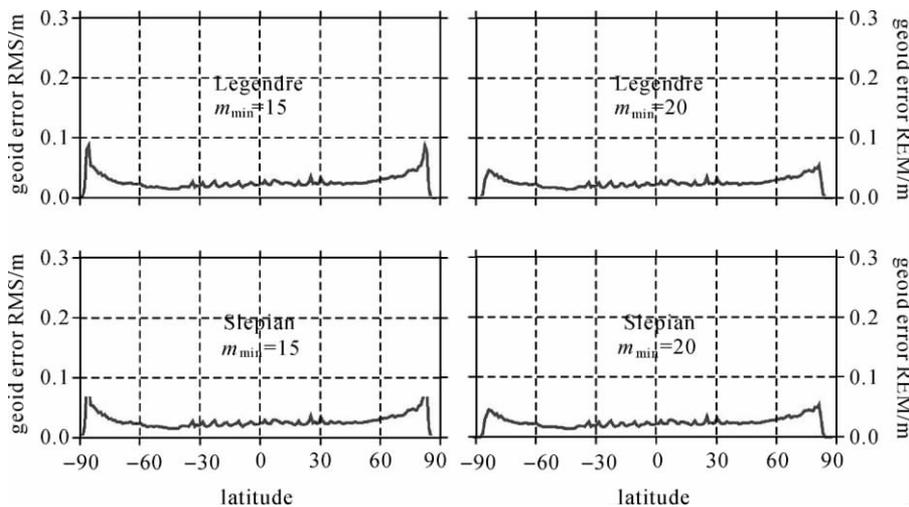


图 6 球谐解与 Slepian 解的大地水准面误差纬向分布图

Fig. 6 Co-latitudinal dependence of geoid error RMS of spherical harmonic solution and Slepian solution

6 结 论

利用卫星重力梯度数据恢复地球重力场的过程中,极空白问题使得球谐系数的低次项估计精度较低。Slepian 函数能够在很大程度上解决面球谐函数的不正交问题,实现对地球重力场的有效恢复。本文对 Slepian 函数的数学性质进行详细分析,改进了求解的稳定性和求解效率,针对卫星重力梯度数据反演地球重力场,推导了引力梯度分量的 Slepian 函数实用展开式,最后通过仿真分析,就 Slepian 局部谱分析方法在卫星重力梯度数据确定地球重力位模型中的应用和前景进行了分析和讨论。研究表明:

Slepian 函数在整个球面和球带上具有双正交性,可看做是同次面球谐函数的线性组合形式,其奇偶性与 $\alpha - m$ 的奇偶性相反。Slepian 频谱能量随着纬度的增加逐渐减小,在两极地区达到最小,实现了将卫星观测信息最大化地聚集在非极空白区域,即保证了卫星轨道的测量特点与数据处理方法的一致性。Grünbaum 算子的引入有效提高了 Slepian 方法求解的稳定性和效率。

Slepian 方法的优良特性体现在 Slepian 频域内的地球重力场求解精度较之球谐域内的结果要高,但其对大地水准面空间分布的恢复精度贡献不明显。地球重力场和大地水准面精度的改进依赖于观测数据精度的提高以及观测数据频谱结构的改善。

参考文献:

- [1] REIGBER C, LTIHR H, SCHWINTZER P. CHAMP Mission Status[J]. *Advances in Space Research*, 2002, 30(2): 129-134.
- [2] TAPLEY B D, BETTADPUR S. The Gravity Recovery and Climate Experiment: Mission Overview and Early Results[J]. *Geophysical Research Letters*, 2004, 31(9): 1-6.
- [3] ESA. Gravity Field and Steady-state Ocean Circulation Mission[M]. Paris: ESA Publications Division, 1999.
- [4] SNEEUW N J, GELDEREN M V. The Polar Gap[J]. *Lecture Notes in Earth Sciences*, 1997, 65: 559-568.
- [5] TSCHERNING C C, FORSBERG R, ALBERTELLA A, et al. The Polar Gap Problem: Space-wise Approaches to Gravity Field Determination in Polar Areas, from Eötvös to mGal[R]. Copenhagen: University of Copenhagen, 2000, 331-336.
- [6] DITMAR P, KUSCHE J, KLEES R. Computation of Spherical Harmonic Coefficients from Gravity Gradiometry Data to Be Acquired by the GOCE Satellite: Regularization Issues[J]. *Journal of Geodesy*, 2003, 77(7-8): 465-477.
- [7] METZLER B, PAIL R. GOCE Data Processing: The Spherical Cap Regularization Approach[J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2005, 49(4): 441-462.
- [8] XU Xinyu, LI Jiancheng, WANG Zhengtao, et al. The Simulation Research on the Tikhonov Regularization Applied in Gravity Field Determination of GOCE Satellite Mission[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2010, 39(5): 465-470. (徐新禹, 李建成, 王正涛, 等. Tikhonov 正则化方法在 GOCE 重力场求解中的模拟研究[J]. *测绘学报*, 2010, 39(5): 465-470.)
- [9] SLEPIAN D. Some Comments on Fourier-analysis, Uncertainty and Modeling[J]. *SIAM Rev*, 1983, 25(3): 379-393.
- [10] ALBERTELLA A, SANSÒF, SNEEUW N. Band-limited Functions on a Bounded Spherical Domain: The Slepian Problem on the Sphere[J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73(9): 436-447.
- [11] PAIL R, PLANKG, SCHUH W D. Spatially Restricted Data Distribution on the Sphere: The Method of Orthonormalized Functions and Applications[J]. *Journal of Geodesy*, 2001, 75(1): 44-56.
- [12] MARK A W, SIMONS F J. Localized Spectral Analysis on the Sphere [J]. *Geophysical Journal International*, 2005, 162(3): 655-675.
- [13] SIMONS F J, DAHLEN F A. Spherical Slepian Functions and the Polar Gap in Geodesy[J]. *Geophysical Journal International*, 2006, 166(3): 1039-1061.
- [14] SIMONS F J, DAHLEN F A, WIECZOREK M A. Spatiospectral Concentration on a Sphere [J]. *SIAM Review*, 2006, 48(3): 504-536.
- [15] SNEEUW N. Inclination Functions: Group Theoretical Background and a Recursive Algorithm[D]. Delft: Delft University of Technology, 1991.
- [16] GILBER E N, SLEPIAN D. Doubly Orthogonal Concentrated Polynomials[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1977, 8(2): 290-319.
- [17] GRÜNBAUM F A, LONGHI L, PERLSTADT M. Differential Operators Commuting with Finite Convolution Integral Operators: Some Non-Abelian Examples[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1982, 42(5): 941-955.
- [18] KOOP R. Global Gravity Field Modeling Using Satellite Gravity Gradiometry[D]. Delft: Neth Geod Comm, 1993.
- [19] XU Xinyu. Study of Determining the Earth's Gravity Field from Satellite Gravity Gradient and Satellite-to-Satellite Tracking Data[D]. Wuhan: Wuhan University, 2008. (徐新禹. 卫星重力梯度及卫星跟踪卫星数据确定地球重力场的研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2008.)

(责任编辑:丛树平)

收稿日期: 2011-01-13

修回日期: 2011-05-31

第一作者简介: 朱广彬(1981—),男,博士,研究方向为卫星大地测量。

First author: ZHU Guangbin (1981—), male, PhD, majors in satellite geodesy.

E-mail: whu_gbzhu@hotmail.com