

文章编号: 1001-1595(2011)S-0133-05

## 捷联式陀螺寻北系统两种解析寻北算法的比较与仿真

刘伟<sup>1</sup>, 袁洪<sup>2</sup>, 周韩雯<sup>3</sup>

中国科学院 光电研究院, 北京 100094

### Comparison and Simulation of Two Resolve Plane Algorithms in the Strapdown Gyro-north Seeking System

LIU Wei, YUAN Hong, ZHOU Hanwen

Academy of Opto-Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100094 China

Abstract: Aimed at strapdown gyro-north seeking system, the algorithms of coordinate transform and vector were conducted, the mistakes of vector resolve plane algorithm formula were corrected, which was put forward in the reference. Although the two algorithm formulae are different in forms, their north seeking accuracies were compared. The simulation results show that the two resolve plane algorithms are both right.

Key words: gyro-north seeking; resolve plane; vector; coordinate transform

摘要: 针对捷联式陀螺寻北倾斜误差补偿, 对坐标变换法和矢量法两种解析调平算法进行推导, 修正参考文献中有关矢量解析调平算法的错误; 给出两种形式不同但寻北结果相同的解析调平解算公式, 并对两种算法的寻北精度进行比较, 仿真与试验结果表明了两种解析调平算法的正确性。

关键词: 陀螺寻北; 解析调平; 矢量法; 坐标变换

中图分类号: V19

文献标识码: A

基金项目: 中国科学院光电研究院创新基金(AOE-CX-200608)

## 1 引言

无论是以高速旋转的陀螺马达作为检测元件的悬挂式陀螺仪, 还是以角速率陀螺作为检测元件的捷联式寻北仪, 都是通过检测地球自转角速度的北向分量, 测量出任意测点的真子午线位置, 实现找北过程。该方法不受地形条件(地面、地下)、气候条件(阴雨、阳光)、时间条件(白昼、黑夜)的限制, 真正实现自主无依托寻北定向<sup>[1-4]</sup>。

当转台倾斜时, 由于受地球旋转角速度天向分量的影响, 系统敏感的不再是地球自转角速度北向分量, 而是北向分量和天向分量的合成矢量, 于是引起方位角(寻北)的偏差。经过推导, 如果倾斜角度为 $1^\circ$ , 方位角的最大偏差为 $50'$ , 因此必须对转台进行调平<sup>[5-8]</sup>。人工调平操作时间长, 为了达到快速、精确调平的目的, 通常采用解析调平算法, 对寻北结果进行补偿, 以保证寻北精度<sup>[9-13]</sup>。

首先推导两种解析调平(倾斜误差补偿)算法的公式, 然后在同样倾斜条件下分别用这两种算法进行寻北补偿, 最后给出仿真与试验的结果和结论。

## 2 解析调平算法的原理及公式推导

捷联式寻北原理是将当地地理坐标系内地球自转角速度分量作为测量基准投影到寻北仪台体坐标系内, 并利用由角速率陀螺和加速度计构成的惯性敏感元件在载体坐标系内对地球自转角速度分量和当地重力加速度分量进行测量, 最终实现寻北和解析调平的目的。

从原理上讲, 因为测量基准是地球自转角速度和当地重力加速度(其值为常值), 所以无论采用何种解析调平算法, 其寻北精度取决于陀螺的精度, 其解析调平精度取决于加速度计的精度。

这里分别采用坐标变换和矢量投影两种方法推导解析调平算法, 目的在于验证两种算法的正确性和一致性。

### 2.1 坐标变换法

坐标变换法的原理是通过坐标变换, 建立当地地理坐标系向载体坐标系的转换关系, 结合多位置陀螺寻北的特点解算出航向角和姿态角, 并最终实现倾斜状态下寻北误差的补偿。

如图 1 所示, 当地地理坐标系为  $OXYZ$  (东北天坐标系), 以  $OZ$  为旋转轴, 顺时针转  $\phi$  角, 转到

坐标系  $OX_p Y_p Z$ ; 然后以  $OX_p$  为旋转轴, 逆时针转  $\theta$  角, 转到坐标系  $OX'_p Y'_p Z'$ ; 由以  $OY'_p$  为旋转轴, 逆时针转  $\gamma$  角, 转到三个姿态角为  $\phi, \theta$  和  $\gamma$  的寻北仪平台坐标系  $OX''_p Y''_p Z''$ 。

寻北仪多位置寻北时, 台面逆时针绕  $OZ''$  轴旋转  $\theta_i$  角,  $\theta_i = (i - 1) \times 2\pi/n, i = 1, 2, \dots, n$ 。所以平台坐标系  $OX'_p Y'_p Z'$  再绕  $OZ''$  为旋转轴, 逆时针转  $\theta_i$  角, 由平台坐标系  $OX'_p Y'_p Z'$  变换到载体坐标系  $OX_b Y_b Z''$ 。

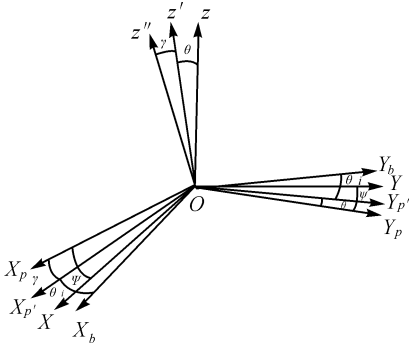


图1 坐标变换图

Fig. 1 Coordinate transformation

$$\begin{bmatrix} \omega_{X_b} \\ \omega_{Y_b} \\ \omega_{Z''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_N \\ \omega_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega_N(-\sin \phi \cos \gamma + \cos \phi \sin \gamma \sin \theta) - \omega_H \sin \gamma \cos \theta] \cos \theta \\ -[\omega_N(-\sin \phi \cos \gamma + \cos \phi \sin \gamma \sin \theta) - \omega_H \sin \gamma \cos \theta] \sin \theta \\ \omega_N(-\sin \phi \sin \gamma - \cos \phi \sin \theta \cos \gamma) + (\omega_N \cos \theta \cos \phi + \omega_H \sin \theta) \sin \theta + (\omega_N \cos \theta \cos \phi + \omega_H \sin \theta) \cos \theta + \omega_H \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中,  $\omega_N = \omega_e \cos \phi, \omega_H = \omega_e \sin \phi; \phi$  为当地的地理纬度;  $\omega_e$  为地球自转角速度。

令  $\Omega_x = \sum_{i=1}^n \omega_i \sin \theta_i, \Omega_y = \sum_{i=1}^n \omega_i \cos \theta_i, n$  为转动一圈的采样点数, 其中  $\omega_i = \omega_{y_b}$ , 则

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \frac{n}{2} [\omega_N \sin \phi \cos \gamma - \omega_N \cos \phi \sin \gamma \sin \theta + \omega_H \sin \gamma \cos \theta] \\ \Omega_y &= \frac{n}{2} [\omega_N \cos \theta \cos \phi + \omega_H \sin \theta] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由此可得

$$\phi = \arctan \left( \frac{\Omega_x \cos \theta + \Omega_y \sin \gamma \sin \theta - \frac{n}{2} \omega_H \sin \gamma}{\Omega_y \cos \gamma - \frac{n}{2} \omega_H \sin \theta \cos \gamma} \right) \quad (3)$$

式(3)就是通过坐标变化法推导出的带解析调平的寻北算法, 再根据加速度计输出的数据计算出寻北仪的姿态角就可以补偿倾斜带来的寻北误差。

### 2.2 矢量法

矢量分析法原理是通过矢量投影, 分析水平和倾斜状态下, 地球自转角速度和重力加速度分别在陀螺和加速度计敏感轴上的矢量投影, 最终实现倾斜状态下寻北误差的补偿。

如图2所示,  $N$  为真北,  $I$  为陀螺敏感轴(代表寻北仪的北向基准),  $A$  为加速度计敏感轴,  $\phi$  为真北与北向基准夹角,  $a$  和  $b$  为地球自转角速度北向分量在  $I$  及其正交轴上的投影,  $a_A$  和  $b_A$  为重力加速度倾斜分量在  $A$  及其正交轴上的投影。

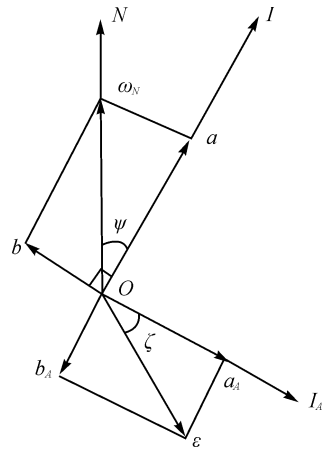


图2 模型矢量图

Fig. 2 Vector model

寻北时, 转台逆时针旋转, 在一周  $n$  个转角位置  $\theta_i = (i - 1) \times 2\pi/n, i = 1, 2, \dots, n$ , 陀螺输出的数学模型为

$$y_i = R + a \cos \theta_i + b \sin \theta_i + w_i \quad (4)$$

式中,  $y_i$  为陀螺输出;  $R$  为陀螺常值漂移;  $w_i$  为陀螺测量噪声;  $a = \omega_N \cos \phi; b = \omega_N \sin \phi$ 。

加速度计输出的数学模型为

$$A_i = R_A + a_A \cos \theta_i + b_A \sin \theta_i + w_{A_i} \quad (5)$$

式中,  $A_i$  为加速度计输出信号;  $R_A$  为加速度计的零偏;  $w_{A_i}$  为加速度计的测量噪声;  $a_A = g \sin \epsilon \cos \zeta; b_A = -g \sin \epsilon \sin \zeta; g$  为当地的重力加速度;  $\epsilon$

为台面倾斜角;  $\zeta$  为加表敏感轴的倾斜方位角。

通过最小二乘处理可以对陀螺和加速度计数学模型的系数进行估计。

假定  $\varepsilon = 0$ , 以陀螺为例, 令

$$Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$$

$$X = [R, a, b]^T$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \sin \theta_n \end{bmatrix}$$

组成线性方程

$$Y = AX + W \tag{6}$$

其最小二乘解为

$$\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T Y \tag{7}$$

当  $\{w_i\}$  为零均值白噪声时,  $\hat{R}$ 、 $\hat{a}$ 、 $\hat{b}$  均为无偏估计。

在求得  $\hat{a}$  和  $\hat{b}$  后, 即可计算方位角的估计值

$$\hat{\phi} = \arctg \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \tag{8}$$

当  $\varepsilon \neq 0$  时, 同理可求得  $\hat{a}_A$  和  $\hat{b}_A$ , 进而计算  $\varepsilon$  和  $\zeta$  的估计值

$$\left. \begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \arcsin \frac{\sqrt{\hat{a}_A^2 + \hat{b}_A^2}}{g} \\ \hat{\zeta} &= -\arctan \frac{\hat{b}}{\hat{a}} \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

由于台面倾斜 ( $\varepsilon \neq 0$ ), 地球自转角速度的天向分量  $\omega_H$  将在台面上产生投影  $\omega_H \sin \varepsilon$ , 它在陀螺输入轴及其正交轴上的投影分别为  $-\omega_H \sin \varepsilon \cos \zeta$  和  $-\omega_H \sin \varepsilon \sin \zeta$ 。

现利用一只加速度计通过转台多位置旋转一周, 估计出  $\hat{\varepsilon}$  和  $\hat{\zeta}$ , 就可以对寻北结果进行补偿, 经过补偿的寻北公式为

$$\hat{\phi} = \arctg \frac{(\hat{b} + \omega_H \sin \hat{\varepsilon} \sin \hat{\zeta}) / \cos(\theta_b)}{(\hat{a} + \omega_H \sin \hat{\varepsilon} \cos \hat{\zeta}) / \cos(\theta_a)} \tag{10}$$

式中,  $\theta_a$  为矢量轴  $I$  的倾斜角度;  $\theta_a = \arcsin(-\sin(\varepsilon)\cos(\zeta))$ ;  $\theta_b$  为矢量轴  $I_A$  的倾斜角度,  $\theta_b = \arcsin(-\sin(\varepsilon)\sin(\zeta))$ 。

文献[5]和文献[7]中, 给出的经过倾斜误差补偿的寻北公式为

$$\hat{\phi} = \arctg \frac{\hat{b} + \omega_H \sin \hat{\varepsilon} \sin \hat{\zeta}}{\hat{a} + \omega_H \sin \hat{\varepsilon} \cos \hat{\zeta}} \tag{11}$$

该公式在实际应用中是有问题的, 因为  $\hat{b} + \omega_H \sin \hat{\varepsilon} \sin \hat{\zeta}$  和  $\hat{a} + \omega_H \sin \hat{\varepsilon} \cos \hat{\zeta}$  是地球自转角速率分量在倾斜台面上的投影, 计算出的方位角  $\hat{\phi}$  是寻北仪基准在倾斜台面内与真北的夹角, 而不是所期望的寻北仪基准与真北在水平面内的夹角。仿真验证如图 3 所示。

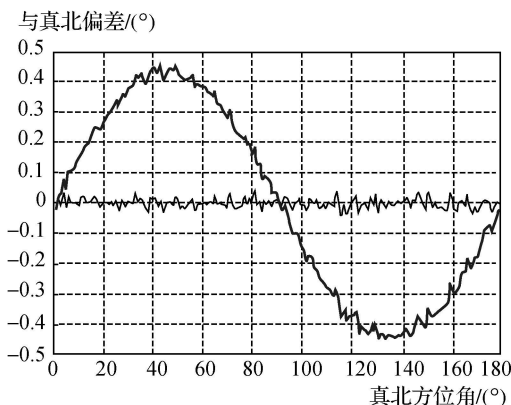


图 3 式(10)与式(11)寻北误差比较

Fig. 3 Gyro-north seeking error of Eq. (10) and Eq. (11)

图 3 中横轴为真北方位角度, 纵轴为寻北误差, 其中实线为按式(10)进行倾斜误差补偿后的寻北误差; 虚线为按式(11)进行补偿后的寻北误差。仿真条件参见 3.1 节。

从图 3 结果可以看出如果按照式(11)进行寻北会造成较大的寻北偏差, 最大偏差约为倾斜角度的 5%, 因此式(11)没有对倾斜造成的寻北进行完整补偿, 而式(10)可以进行充分补偿, 补偿后的算法误差可以忽略(见 3.1 节)。

### 3 仿真比较与结果分析

为了检验两种解析调平算法的正确性与一致性, 专门进行了算法仿真, 并进行试验验证仿真结果正确性。

#### 3.1 算法仿真

仿真条件如下:

- (1) 陀螺精度  $0.02^\circ/h$ , 加速度计精度  $2 \times 10^{-5} g$ ;
- (2) 寻北仪倾斜角度为  $10^\circ$ ;
- (3) 仿真 PC 机主频 1 GHz;
- (4) 仿真环境采用 MATLAB 6.5。

仿真结果如图 4、图 5 所示。

图 4 为有无解析调平时的寻北误差曲线, 目的是证明两种解析调平算法的正确性。其中, 横轴为真北方位角度, 纵轴为寻北误差曲线, 从

图 4 中可以看出:

(1) 当没有采取姿态补偿算法时, 寻北误差与倾斜角度有关, 最大误差为  $8.4^\circ$ ;

(2) 采取姿态补偿算法后, 寻北误差降至陀螺精度本身造成的寻北误差范围以内, 有效地补偿了倾斜造成的寻北误差。

因此, 算法仿真证明了两种解析调平寻北算法的正确性。

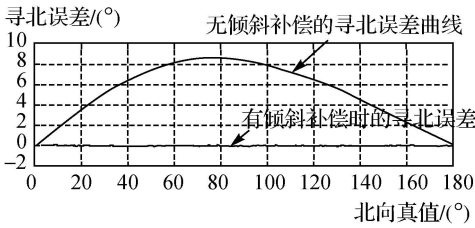


图 4 有无倾斜补偿时的寻北误差曲线

Fig. 4 The curve of gyro-north seeking error with/without resolve plane algorithms

图 5 为采用两种解析调平算法得出的寻北结果的差值, 目的是证明两种解析调平算法的一致性。其中, 横轴为真北方位角度, 纵轴为两种补偿算法寻北结果的差值。从图中可以看出:

(1) 两种解析调平寻北算法间的误差  $< 1 \times 10^{-4}^\circ$ , 远小于陀螺和加速度计精度本身造成的寻北误差, 属于可忽略的算法误差, 从而证明了两种算法的一致性。

(2) 两种补偿算法的差值与真北方位角度有关, 方位角为  $90^\circ$  时最小,  $0^\circ$  和  $180^\circ$  附近较大, 这种误差与方位效应有关。本文主要讨论两种补偿算法的一致性和正确性, 对方位效应造成的误差及其机理暂不作详细分析。

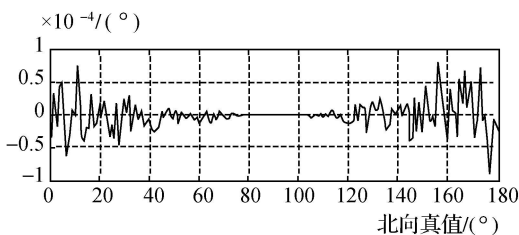


图 5 两种解析调平寻北算法寻北结果差值曲线

Fig. 5 The curve of difference of Gyro-North seeking using two resolve plane algorithms

### 3.2 试验结果

为了检验两种解析调平算法的正确性与一致性, 还进行了试验研究。

试验条件如下:

(1) 陀螺精度优于  $0.01^\circ/h$ , 加速度计精度  $5 \times 10^{-4} g$ , 寻北仪倾斜角度为  $5^\circ$ ;

(2) 在位置转台上进行 24 位置寻北试验;

(3) 通过 PC 机采集陀螺和加速度计数据并进行寻北解算。

表 1 两种解析调平算法寻北精度测试结果比较

Tab.1 The result of gyro-north seeking using two resolve plane algorithms

寻北组数	坐标变换法寻北结果	矢量法寻北结果
1	48.028 34'	47.995 60'
2	47.986 18'	48.013 29'
3	48.009 19'	47.991 87'
4	47.987 78'	48.008 16'
5	48.003 02'	48.000 93'
6	47.986 92'	47.981 88'
7	47.978 95'	47.980 54'
均值	47.997 20'	47.997 24'
标准差	1.038 16'	0.745 67'
与真值偏差	- 0.168 06'	- 0.165 60'

由表 1 可以看出, 由两种算法得出的半实物仿真结果在精度允许范围内是相同的, 说明用这两个公式进行解析调平寻北是正确和一致的。

虽然两种算法的推导的过程和方法不同, 但是均可实现对寻北转台的精确解析调平, 具有相同的寻北精度。

### 参考文献:

[1] KROGMANN U K. Concept and Performance Analysis of A Strapdown Northfinder [C] // Proceedings of IEEE the National Aerospace and Electronics Conference, New York: IEEE, 1985: 260-267.

[2] QU Dongcai. Development of Strapdown Inertial Navigation System and Its Military Application[J]. Aeronautical Science and Technology, 2004(6):27-30. (曲东才. 捷联惯导系统发展及其军事应用[J]. 航空科学技术, 2004(6): 27-30.)

[3] WATSON W S. Improved North Seeking Gyro [C] // Proceedings of IEEE PLANS, Position Location and Navigation Symposium. Monterey: IEEE, 1992: 121-125.

[4] GUO Xiqing, WU Keyong. New Type Gyro-theodolite and Its Applications [J]. Optics and Precision Engineering, 2001(2): 182-185 (郭喜庆, 武克用. 新型陀螺经纬仪的研究与应用[J]. 光学精密工程, 2001(2): 182-185.)

[5] GU Qitai, LI Benliang, LIU Xuebin, et al. Analytic Dynamic North Finder[J]. Journal of Tsinghua University:

(下转第 144 页)

- 1997, 20(3): 566-571.
- [4] CARLSON N A. Federated Filter for Fault-tolerant Integrated Navigation Systems[C] // Proceedings of Position Location and Navigation System' 88. Orlando: IEEE, 1988: 110-119.
- [5] CARLSON N A. Information-sharing Approach to Federated Kalman Filtering[C] // Proceedings of the IEEE National Aerospace and Electronics Conference. [s. n.]: Dayton, 1988: 1581.
- [6] CARLSON N A. Federated Square Root Filter for Decentralized Parallel Processes [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1990, 26(3): 517-525.
- [7] YU Feng, LIU Jianye, XIONG Zhi, et al. Multi-information Fusion Method of Micro Satellite Attitude Determination System [J]. Journal of Shanghai JiaoTong University, 2008, 42(5): 831-835. (郁丰, 刘建业, 熊智, 等. 微小卫星姿态确定系统多信息融合滤波技术[J]. 上海交通大学学报, 2008, 42(5): 831-835.)
- [8] Markley F L, Crassidis J L, Cheng Y. Nonlinear Attitude Filtering Methods[C] // Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, San Francisco: AIAA, 2005.
- [9] ZHANG Hongmei. Nonlinear Filter and Its Application to Attitude Estimation and Navigation[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2004. (张红梅. 非线性滤波及其

在姿态确定和导航中的应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2004.)

- [10] Bierman G J. Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation[M]. English: Academic Press, 1977.
- [11] YU Feng, LIU Jianye, XIONG Zhi. Application of Predictive Filter in Satellite Attitude Determination[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(1): 110-114. (郁丰, 刘建业, 熊智. 预测滤波算法在微小卫星姿态确定中的应用[J]. 宇航学报, 2008, 29(1): 110-114.)
- [12] TU Shancheng. Attitude Dynamics and Control of Satellite II [M]. Beijing: Astronautic Publishing House. (屠善澄. 卫星姿态动力学与控制 II[M]. 北京: 中国宇航出版社, 1998.)

(责任编辑: 陈品馨)

收稿日期: 2011-01-17

修回日期: 2011-03-22

第一作者简介: 张智斌(1975—), 男, 高级工程师, 主要从事航天器轨道、姿态控制的理论与应用研究。

First author: ZHANG Zhibin (1975—), male, senior engineer, majors in theory and application research of spacecraft orbit and attitude.

E-mail: pu32208@yahoo.com.cn

(上接第 136 页)

- Science and Technology, 2000(8): 32-35. (顾启泰, 李本亮, 刘学斌, 等. 解析式动态找北仪[J]. 清华大学学报: 自然科学, 2000(8): 32-35.)
- [6] SHEN Chengwu, WANG Zhiqian, LIU Chang, et al. A Novel Level Compensation Technology of North-Seeking System Using Accelerometer [J]. Journal of Test and Measurement Technology, 2008(3): 208-209. (沈铨武, 王志乾, 刘畅, 等. 加速度计寻北系统调平补偿技术分析[J]. 测试技术学报, 2008(3): 208-210.)
- [7] GUO Xiqing, WU Keyong. A North-seeker Based on the Modulation and Output of a Ring Laser Gyroscope, Optoelectronic Engineering [J]. 2001, 28(2): 11-35. (郭喜庆, 武克用. 基于环形激光陀螺调制输出的寻北系统[J]. 光电工程, 2001, 28(2): 11-13.)
- [8] LAWRENCE W. The North Finding Module [J]. Navigation, Journal of Institute of Navigation, 1997, 44(3): 323-328.
- [9] DONOHO D. De-noising by soft-thresholding [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1995, 41: 613-627.
- [10] LAMPRECHT H A, TROMP H, BOTT M A. Base Motion Compensation for A Fiber-optic North-seeking Gyroscope[C] // Proceedings of Symposium Gyro Technol-

ogy. Stuttgart: [s. n.], 1996.

- [11] DYOTT R B. Method for Finding True North Using a Fibre-optic Gyroscope[J]. Electronics Letters, 1994, 30: 1087-1088.
- [12] DYOTT R B, ALLEN D E A. Fiber Optic Gyroscope North Finder [C] // Proceedings of SPIE. Glasgow: SPIE, 1994: 442-448.
- [13] CHEN Jiabin, LIU Xingqiao. Study of the Error of a Strap-down Gyro North Seeking Instrument and Test Analysis [J]. Acta Armamentarii, 1999, 20(4): 371-374. (陈家斌, 刘星桥. 捷联式陀螺寻北仪误差分析与试验研究[J]. 兵工学报, 1999, 20(4): 371-374.)

(责任编辑: 张燕燕)

收稿日期: 2011-01-31

修回日期: 2011-03-07

第一作者简介: 刘伟, 男, 工程师, 主要从事导航理论及系统研究

First author: LIU Wei (1978—), male, engineer, majors in navigation theory and system research.

E-mail: liuwei924@sina.com