文章编号: 1001-1595(2011) S-0115-05

加权总体最小二乘在三维基准转换中的应用

袁 庆[1], 楼立志[1,2], 陈玮娴[1]
1. 同济大学 测量与国土信息工程系, 上海 200092; 2. 国家测绘局现代工程测量重点实验室, 上海 200092

The Application of the Weighted Total Least-squares to Three Dimensional—Datum Transformation

YUAN Qing[1], LOU Lizhi[1,2], CHEN Weixian[1]
1. Department of Surveying and Geo-informatics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Modern Engineering Surveying of SBSM, Shanghai 200092, China

Abstract: The serviceability of weighted total least-squares method, the LS-TLS method and the least-squares method were compared in the three dimensional small angular region rectangular coordinates transformation. When the coordinate observed value was influenced by the error in both of the coordinate systems, using WTLS method could revise the observation vector $\boldsymbol{y}$ and the coefficient matrix $\boldsymbol{A}$, introduce the coordinate prior precision to the adjustment computation, and fix the constant element and adjust the data element through with the weighted matrix $\boldsymbol{P}_A$.

Key words: three dimensional datum transformation; error-in-variables(EIV); least-squares; LS-TLS; weighted total least-squares

摘 要: 对比研究加权总体最小二乘(weighted total least-squares, WTLS) 方法和混合最小二乘(LS-TLS) 方法、最小二乘(least-squares, LS) 方法在三维空间小角度直角坐标转换中的适用性。在两套坐标系下坐标测量值均存在误差时, 用 WTLS 方法不但可以对观测向量 $\boldsymbol{y}$ 和系数矩阵$\boldsymbol{A}$ 同时修改、将坐标先验精度引入平差计算, 而且引入的权阵 $\boldsymbol{P}_A$ 对系数阵$\boldsymbol{A}$ 起到固定常数元素而只修改必要数据元素的作用, 以得到更合适的参数解。

关键词: 三维基准转换; 变量中的误差模型; 最小二乘; 混合最小二乘; 加权总体最小二乘
中图分类号: P228 文献标识码: A

1 引 言

坐标转换是将空间数据从一个坐标系统转换到另一个坐标系统的过程, 实质是根据两个坐标系下的公共已知点求解坐标转换参数的过程。两个坐标系的转换参数包括: 3 个平移参数、1 个尺度参数和 3 个旋转参数。当旋转角是小角度或初始值已知时, 由 3 个旋转角组成的旋转矩阵可以简化, 空间直角坐标转换化为线性的布尔沙(Bursa) 模型[1]。当观测值个数大于必要观测数时, 通常采用最小二乘(LS) 的方法, 建立经典的高斯-马尔可夫(G-M) 模型, 求解参数估值。G-M 模型的前提是假设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 完全准确, 随机误差仅存在于观测向量 $\boldsymbol{y}$ 中, 即 G-M 模型仅适用于坐标已知值不受随机误差影响的情况。然而同一控制点在两套坐标系下的坐标量测值均存在误差, 因此 G-M 模型并不适合。鉴于此, 文献[2] 将 TLS 方法应用于摄影测量中的坐标系转换[3], 建立的 EIV 模型能较好解决系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和观测向量 $\boldsymbol{y}$ 中均存在随机误差的情况[4-9]。但是由于系数阵 $\boldsymbol{A}$ 中的某些固定元素不需要修改, 即系数阵 $\boldsymbol{A}$ 中不是所有元素都被随机误差污染, 如常数元素, 需要修改的是含有观测数据元素。文献[10] 采用 LS-TLS 方法, 求解坐标转换参数, 能够很好地固定不需要修改的常数列。然而, 在坐标转换模型的系数阵中常数元素不仅以列的形式存在, 同时也在数据列中独立出现, TL-LS 方法显然是不合理的, 该方法只是固定部分常数列, 然而对存在于数据列中的常数元素却进行了修改。笔者采用加权总体最小二乘的方法[11], 利用系数阵的权阵 $\boldsymbol{P}_A$ 对 $\boldsymbol{A}$ 中的元素进行定权, 达到改正系数阵 $\boldsymbol{A}$ 所有数据元素和固定所有常数元素的作用。同时由于两套坐标的获得是不等精度的, 根据坐标的已知精度确定相应的权值, 经实例计算, 得到更加合理的模型。

2 坐标系转换及加权总体最小二乘原理

2.1 坐标转换模型

当旋转角是小角度或初始值已知时,空间直角坐标转化为线性的布尔沙模型

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_Z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_Z & 0 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中,(X_A, Y_A, Z_A)、(X_B, Y_B, Z_B)分别为原坐标系和目标坐标系的坐标;(X_0, Y_0, Z_0)为平移参数。当控制点数不小于3时,坐标转换模型写成如下形式

$$\underset{3n\times 1}{\overset{y}{\begin{bmatrix} X_{B1} \\ Y_{B1} \\ Z_{B1} \\ \vdots \\ X_{Bn} \\ Y_{Bn} \\ Z_{Bn} \end{bmatrix}}} = \underset{3n\times 7}{\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{A1} & Y_{A1} & X_{A1} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{A1} & 0 & -X_{A1} & Y_{A1} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{A1} & X_{A1} & 0 & Z_{A1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{An} & Y_{An} & X_{An} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{An} & 0 & -X_{An} & Y_{An} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{An} & X_{An} & 0 & Z_{An} \end{bmatrix}}} \underset{7\times 1}{\overset{\xi}{\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \mu \end{bmatrix}}} \tag{2}$$

式中,(X_{Ai}, Y_{Ai}, Z_{Ai})和(X_{Bi}, Y_{Bi}, Z_{Bi})($i=1,2,\cdots,n$)分别为第i个控制点在WGS-84坐标系和地方坐标系下的坐标,n为控制点数。

2.2 最小二乘求解

当观测数大于参数个数时,采用最小二乘方法求解参数,前提是误差仅存在于观测向量$\boldsymbol{y}$中而系数矩阵$\boldsymbol{A}$不受偶然误差影响。建立G-M模型如下

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{A}(\xi^0 + \delta\xi), \quad \boldsymbol{e}_y \sim N(0, \sigma_0^2) \tag{3}$$

在准则$\boldsymbol{e}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_y = \min$下得到最小二乘解为

$$\delta\hat{\xi} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\xi^0) \tag{4}$$

单位权中误差

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}(\xi^0 + \delta\hat{\xi}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}(\xi^0 + \delta\hat{\xi}))}{3n-7}} \tag{5}$$

2.3 混合总体最小二乘求解

在实际中由于模型误差、仪器误差和人为误差等影响使得同一坐标在两套坐标系下都含有随机误差。在此情况下系数阵$\boldsymbol{A}$需要修正,对于式(2)中的$\boldsymbol{A}$明显可以看出前3列是常数列不需要修正,因此引入LS-TLS方法求解。首先建立EIV模型

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{e}_y = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}_A)(\xi^0 + \delta\xi),$$
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_y \\ \mathrm{vec}\boldsymbol{E}_A \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_y & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_A \end{bmatrix} \right) \tag{6}$$

式中,vec为矩阵列向量化算子;$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_A$为观测向量和系数阵列向量化后向量的随机误差;$\boldsymbol{Q}_y$、$\boldsymbol{Q}_A$分别为$3n\times 3n$维和$21n\times 21n$维的单位矩阵。求解方法是对式(2)中的$\boldsymbol{A}$、ξ分解

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{A}_1 \quad \boldsymbol{A}_2], \boldsymbol{A}_1 \in \mathbf{R}^{3n\times m_1}, \boldsymbol{A}_2 \in \mathbf{R}^{3n\times m_2} \\ &\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2], \boldsymbol{x}_1 \in \mathbf{R}^{m_1\times 1}, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbf{R}^{m_2\times 1} \end{aligned} \tag{7}$$

式中,$\boldsymbol{A}_1$为前3列常数列,$\boldsymbol{A}_2$为后4列数据列,所以$m_1=3$、$m_2=4$。LS-TLS目标为

$$\min \|[\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{b}] - [\hat{\boldsymbol{A}}_2, \hat{\boldsymbol{b}}]\|_2 \tag{8}$$

然后对$\boldsymbol{A}_1$进行QR分解,再将$\boldsymbol{Q}$左乘于增广矩阵$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]$得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{A}_1 \quad \boldsymbol{A}_2 \quad \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12} & \boldsymbol{R}_{1b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_{22} & \boldsymbol{R}_{2b} \end{bmatrix} \tag{9}$$

式中,$\boldsymbol{R}_{11} \in \mathbf{R}^{m_1\times m_1}$为上三角矩阵;$\boldsymbol{R}_{12} \in \mathbf{R}^{m_1\times m_2}$,$\boldsymbol{R}_{1b} \in \mathbf{R}^{m_1\times 1}$,$\boldsymbol{R}_{22} \in \mathbf{R}^{(3n-m_1)\times m_2}$,$\boldsymbol{R}_{2b} \in \mathbf{R}^{(3n-m_1)\times 1}$。通过SVD2分解求方程$\boldsymbol{R}_{22}\hat{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{R}_{2b}$得到$\hat{\boldsymbol{x}}_2$,通过LS方法求解方程$\boldsymbol{R}_{11}\hat{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{R}_{1b} - \boldsymbol{R}_{12}\hat{\boldsymbol{x}}_2$得到$\hat{\boldsymbol{x}}_1$。因此通过LS-TLS方法可以在不对坐标重心化的情况下直接计算出坐标转换参数。

2.4 加权总体最小二乘求解

由于LS-TLS方法只是对系数阵前3列固定,而无法对后4列中的常数元素固定,因此引入加权总体最小二乘的方法,建立式(6)的EIV模型,估计准则为:$\boldsymbol{e}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{vec}\boldsymbol{E}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_A\mathrm{vec}\boldsymbol{E}_A = \min$。其中,$\boldsymbol{Q}_y = \boldsymbol{P}_y^{-1}$,$\boldsymbol{Q}_A = \boldsymbol{P}_A^{-1}$,为非负正定对称矩阵,分别表示观测值向量和系数阵列向量化向量的协因数阵。文献[7]给出的WTLS算法中定义$\boldsymbol{Q}_A = \boldsymbol{Q}_x \otimes \boldsymbol{Q}_0$($\otimes$为kronecker积:$\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{N} = [m_{ij} \cdot \boldsymbol{N}], \boldsymbol{M} = [m_{ij}]$)[12],$\boldsymbol{Q}_x$和$\boldsymbol{Q}_0$分别为$\boldsymbol{A}$的行向量协因数阵和列向量协因数阵。将$\boldsymbol{P}_A$看成是$\boldsymbol{A}$阵列向量化后的向量的权阵,使得$\boldsymbol{P}_A$可以给$\boldsymbol{A}$中每一个元素定权。在坐标转换中,同时考虑每个点的先验精度,得到$\boldsymbol{P}_y$、$\boldsymbol{P}_A$如下

$$\boldsymbol{P}_y = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{当地1}^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{当地2}^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{当地n}^2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\underset{21n\times 21n}{\boldsymbol{P}_A}=\mathrm{diag}(P_1,P_2,P_3,\cdots,P_7) \tag{11}$$

$$\underset{3n\times 3n}{\boldsymbol{P}_1}=\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_3=\mathrm{diag}(0,0,\cdots,0) \tag{12}$$

$$\underset{3n\times 3n}{\boldsymbol{P}_4}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{W1}^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{W1}^2} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{Wn}^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{Wn}^2} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\underset{3n\times 3n}{\boldsymbol{P}_5}=\begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{W1}^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{W1}^2} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{Wn}^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{Wn}^2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\underset{3n\times 3n}{\boldsymbol{P}_6}=\begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{W1}^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{W1}^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{Wn}^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{Wn}^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\underset{3n\times 3n}{\boldsymbol{P}_7}=\begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{W1}^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{W1}^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{W1}^2} & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{Wn}^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{Wn}^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{Wn}^2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$\boldsymbol{P}_i(i=1,2,\cdots,7)$为$\boldsymbol{A}$阵中第$i$列向量的权阵,$\sigma_{Wi}^2(i=1,2,\cdots,n)$为原坐标系(WGS-84坐标系)第$i$个点的坐标精度,$\sigma_{当地i}^2(i=1,2,\cdots,n)$为目标坐标系(地方坐标系)$i$个点的坐标精度。

2.5　加权总体最小二乘求解步骤

将式(3)展开,略去二次小项$\boldsymbol{E}_A\delta\xi$,并考虑到$\boldsymbol{E}_A\xi^0=(\xi^{0\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_{3n})\boldsymbol{e}_A$[12],得到

$$\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_A=\boldsymbol{A}\delta\xi+\delta\boldsymbol{y} \tag{17}$$

式中,$\delta\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\xi^0$;$\boldsymbol{B}=\xi^{0\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_{3n}$。采用文献[11]提出的迭代方法[11],得到参数求解步骤如下。

(1) 设初始值$\boldsymbol{E}_{A(0)}=0$。

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{(0)}=\xi^0=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})\\ &\boldsymbol{Q}_{1(0)}=\boldsymbol{Q}_y+(\xi_{(0)}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_{3n})\boldsymbol{Q}_A(\xi_{(0)}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_{3n})\\ &\boldsymbol{e}_{A(0)}=-\boldsymbol{Q}_A(\xi_{(0)}\otimes\boldsymbol{I}_{3n})\boldsymbol{Q}_{1(0)}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\xi_{(0)}-\boldsymbol{A}_{(i)}\delta\xi_{(0)})\\ &\delta\hat{\xi}_{(1)}=(\boldsymbol{A}_{(0)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{1(0)}^{-1}\boldsymbol{A}_{(0)})^{-1}\boldsymbol{A}_{(0)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{1(0)}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{E}_{A(0)}\xi_{(0)})\\ &\xi_{(1)}=\xi_{(0)}+\delta\hat{\xi}_{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(2) 计算$\boldsymbol{A}_{(i)}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_{A(i)}$。

$$\left.\begin{aligned} &\delta\hat{\xi}_{(i+1)}=(\boldsymbol{A}_{(i)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{1(i)}^{-1}\boldsymbol{A}_{(i)})^{-1}\boldsymbol{A}_{(i)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{1(i)}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{E}_{A(i)}\xi_{(i)})\\ &\xi_{(i+1)}=\xi_{(i)}+\delta\hat{\xi}_{(i+1)}\\ &\boldsymbol{e}_{y(i+1)}=\boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{Q}_{1(i)}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\xi_{(i)}-\boldsymbol{A}_{(i)}\delta\hat{\xi}_{(i+1)})\\ &\boldsymbol{e}_{A(i+1)}=-\boldsymbol{Q}_A(\xi_{(i)}\otimes\boldsymbol{I}_{3n})\boldsymbol{Q}_{1(i)}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\xi_{(i)}-\boldsymbol{A}_{(i)}\delta\hat{\xi}_{(i+1)}) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

(3) 重复(2)直到$\|\delta\hat{\xi}_{(i+1)}\|<\delta_0$,$\delta_0$为给定阈值。

(4) 计算单位权中误差

$$\hat{\sigma}_0=\sqrt{\frac{\boldsymbol{e}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_y\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_A\boldsymbol{e}_A}{3n-7}} \tag{20}$$

3　实例计算

表1为WGS-84和地方坐标系下11个公共点坐标,分别选取其中的3个点、5个点、10个点按进行坐标转换求解参数及精度,得到结果见表2~表4。由此可以看出LS方法、LS-TLS方法和WTLS方法求解得到的参数差别不大,而WTLS方法较LS方法提高40%左右,较LS-TLS方法精度提高15%左右。式(21)、(22)分别为3个点求解参数时LS-TLS方法和WTLS方法得到的系数阵$\boldsymbol{A}$的残差矩阵,由式(21)、(22)可以看出在WTLS方法中,由于引入了$\boldsymbol{P}_A$、$\boldsymbol{P}_y$权阵,达到部分修改系数阵$\boldsymbol{A}$的作用,即只修改数据元素,而固定常数元

素,因而使得残差矩阵 $\boldsymbol{E}_{A(\mathrm{WTLS})}$ 中对应的常数项元素的残差为 0, 从而较 LS-TLS 方法得到更合理的模型。

表 1 WGS 84 坐标系和地方坐标系下公共点坐标

Tab. 1 Coordinates for WGS 84 system and local system /m

点号	WGS-84 坐标系坐标				地方坐标系坐标			
	X	Y	Z	σ_W	X	Y	Z	$\sigma_{当地}$
1	2 802 088.418 2	5 009 123.156 9	2 772 386.569 9	0.01	−2 802 191.348 2	5 009 064.765 7	2 772 381.176 8	0.01
2	2 810 072.730 9	5 016 144.572 1	2 751 960.500 7	0.02	−2 810 175.651 5	5 016 086.112 0	2 751 955.053 1	0.02
3	−2 820 464.394 2	5 009 963.991 7	2 752 475.921 1	0.03	−2 820 567.227 2	5 009 905.344 4	2 752 470.385 8	0.03
4	−2 817 059.835 1	5 002 512.999 3	2 769 304.628 8	0.04	−2 817 162.653 8	5 002 454.352 0	2 769 299.110 6	0.04
5	−2 825 673.090 6	4 995 844.301 3	2 772 395.762 9	0.05	−2 825 775.818 2	4 995 785.495 5	2 772 390.169 5	0.05
6	−2 820 994.060 5	4 981 403.048 6	2 802 875.077 3	0.06	−2 821 096.763 4	4 981 344.211 2	2 802 869.494 4	0.06
7	−2 824 607.984 6	4 984 728.145 8	2 793 437.599 7	0.07	−2 824 710.665 4	4 984 669.284 6	2 793 431.999 9	0.07
8	−2 827 184.875 9	4 983 661.601 6	2 792 676.704 2	0.08	−2 827 287.538 0	4 983 602.697 4	2 792 671.081 7	0.08
9	−2 759 153.720 2	5 019 476.803 6	2 796 710.316 7	0.09	−2 759 256.958 4	5 019 419.072 5	2 796 705.276 2	0.09
10	−2 799 960.417 6	5 001 193.709 4	2 788 835.580 2	0.10	−2 800 063.333 9	5 001 135.290 0	2 788 830.195 9	0.10
11	−2 841 060.290 2	4 982 041.618 3	2 781 470.180 5	0.11	−2 841 162.870 7	4 981 982.504 1	2 781 464.448 9	0.11

表 2 3 个点求解参数及精度比较(1、9、11 号点)

Tab. 2 The comparison among the parameters calculated and accuracies with piont 1, 9, 11

	X_0/m	Y_0/m	Z_0/m	μ	$\varepsilon_X/10^{-5}$rad	$\varepsilon_Y/10^{-5}$rad	$\varepsilon_Z/10^{-5}$rad	σ_0/m
LS	−3.824 7	7.349 9	3.865 7	1.000 0	0.258 0	0.439 0	1.933 4	0.149 386
TL-TLS	−3.824 7	7.349 9	3.865 7	1.000 0	0.258 0	0.439 0	1.933 4	0.105 632
WTLS	−3.824 7	7.349 9	3.865 7	1.000 0	0.248 1	0.428 8	1.935 7	0.091 099

表 3 5 个点求解参数及精度比较(1、3、9、10、11 号点)

Tab. 3 The comparison among the parameters calculated and accuracies with piont 1, 3, 9, 10, 11

	X_0/m	Y_0/m	Z_0/m	μ	$\varepsilon_X/10^{-5}$rad	$\varepsilon_Y/10^{-5}$rad	$\varepsilon_Z/10^{-5}$rad	σ_0/m
LS	−3.824 7	7.349 9	3.865 7	1.000 0	0.240 6	0.429 5	1.936 5	0.106 933
TL-TLS	−3.824 7	7.349 9	3.865 7	1.000 0	0.250 7	0.429 6	1.936 7	0.075 612
WTLS	−3.824 7	7.349 9	3.865 7	1.000 0	0.273 2	0.454 5	1.931 5	0.066 497

表 4 10 个点求解参数及精度比较(1~9、11 号点)

Tab. 4 The comparison among the parameters calculated and accuracies with piont 1~9, 11

	X_0/m	Y_0/m	Z_0/m	μ	$\varepsilon_X/10^{-5}$rad	$\varepsilon_Y/10^{-5}$rad	$\varepsilon_Z/10^{-5}$rad	σ_0/m
LS	−3.824 7	7.349 9	3.865 7	1.000 0	0.240 6	0.429 5	1.936 5	0.106 933
TL-TLS	−3.824 7	7.349 9	3.865 7	1.000 0	0.250 7	0.429 6	1.936 7	0.075 612
WTLS	−3.824 7	7.349 9	3.865 7	1.0000	0.273 2	0.454 5	1.931 5	0.066 497

$$E_{A(A\Sigma-TA\Sigma)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.000\,000\,370\,569\,98 & 0.000\,000\,055\,128\,035 & -0.000\,000\,087\,918\,658 & -0.019\,086\,862\,902\,224 \\ 0 & 0 & 0 & -0.000\,000\,957\,505\,92 & 0.000\,000\,142\,443\,862 & -0.000\,000\,227\,170\,682 & -0.049\,318\,037\,281\,036 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000\,000\,554\,184\,616 & -0.000\,000\,082\,443\,560 & 0.000\,000\,131\,481\,690 & 0.028\,544\,259\,519\,907 \\ 0 & 0 & 0 & -0.000\,002\,035\,636\,98 & 0.000\,000\,302\,832\,586 & -0.000\,000\,482\,959\,982 & -0.104\,849\,086\,066\,827 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000\,001\,018\,226\,319 & -0.000\,000\,151\,476\,963 & 0.000\,000\,241\,576\,748 & 0.052\,445\,548\,850\,595 \\ 0 & 0 & 0 & -0.000\,001\,575\,191\,22 & 0.000\,000\,234\,334\,135 & -0.000\,000\,373\,718\,069 & -0.081\,133\,012\,067\,070 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000\,002\,403\,124\,688 & -0.000\,000\,357\,502\,083 & 0.000\,000\,570\,147\,360 & 0.123\,777\,190\,441\,069 \\ 0 & 0 & 0 & -0.000\,000\,008\,739\,89 & 0.000\,000\,001\,300\,194 & -0.000\,000\,002\,073\,561 & -0.000\,450\,163\,517\,605 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000\,000\,995\,948\,942 & -0.000\,000\,148\,162\,858 & 0.000\,000\,236\,291\,385 & 0.051\,298\,113\,034\,050 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$
E_{A(\mathrm{WTLS})}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -0.000000117856530 & -0.000000519045508 & 0.005369239794960\\
0 & 0 & 0 & 0.000000134324323 & 0 & -0.000001006455015 & 0.010411222591489\\
0 & 0 & 0 & -0.00000004468719 & 0.000000076027550 & 0 & -0.003463619251080\\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.000000372898512 & -0.000001642261973 & -0.050964885745198\\
0 & 0 & 0 & -0.00000017146706 & 0 & 0.000001284755287 & -0.039870256695395\\
0 & 0 & 0 & 0.00000010576446 & -0.000000179939986 & 0 & 0.024592806240508\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.000000310638079 & 0.000001368064201 & -0.056607481507456\\
0 & 0 & 0 & 0.000000090987497 & 0 & -0.000000681743937 & 0.028209061590710\\
0 & 0 & 0 & -0.000000006598130 & 0.000000112255803 & 0 & -0.020456340358748
\end{bmatrix} \tag{22}
$$

4　结束语

(1) 由于WTLS方法建立的EIV模型对所有变量中的误差都进行了最小化约束,因此与认为系数矩阵$\boldsymbol{A}$完全准确的最小二乘方法相比,建立起一个当系数矩阵$\boldsymbol{A}$以及观测向量$\boldsymbol{y}$均含有误差时更加合理的小角度坐标转换模型。

(2) 根据坐标精度引入$\boldsymbol{P}_A$、$\boldsymbol{P}_y$权阵的WTLS方法,其意义在于将控制点精度引入总体最小二乘平差的同时对系数矩阵$\boldsymbol{A}$达到了部分修改的作用,使得模型更加合理。

(3) WTLS方法较LS方法计算单位权中误差小40%左右,较LS-TLS方法小15%左右。

参考文献:

[1] SHEN Yunzhong, HU Leiming, LI Bofeng. Ill-posed Problem in Determination of Coordinate Transformation Parameters with Small Area's Data Based on Bursa Model[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2006, 35(2): 95-98. (沈云中,胡雷鸣,李博峰. Bursa模型用于局部区域坐标变换的病态问题及其解法[J]. 测绘学报, 2006, 35(2): 95-98.)

[2] CHEN Yi, LU Jue, ZHENG Bo. Application of Total Least Squares to Resection Space[J]. Geomatices and Information Science of Wuhan University, 2008, 33(12): 1271-1274. (陈义,陆珏,郑波. 总体最小二乘方法在空间后方交会中的应用[J]. 武汉大学学报:信息科学版, 2008, 33(12): 1271-1274.)

[3] WANG Zhizhuo. The Principle of Photogrammetry[M]. Beijing: Publishing House of Surveying and Mapping, 1984: 14-122. (王之卓. 摄影测量原理[M]. 北京:测绘出版社, 1984: 14-122.)

[4] GOLUB H G, VAN L F C. An Analysis of the Total Least Squares Problem[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1980, 17(6): 883-893.

[5] MARKOVSKY I, VAN H S, KUKUSH A. On the Computation of the Multivariate Structured Total Least Squares Estimator[J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2004, 11(5): 591-608.

[6] SCHAFFRIN B. A Note on Constrained Total Least-squares Estimation[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2006, 417(1): 245-258.

[7] SCHAFFRIN B, ANDREAS W. On Weighted Total Least-squares Adjustment for Linear Regression[J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(7): 415-421.

[8] SCHAFFRIN B, FELUS Y A. On The Multivariate Total Least-squares Approach to Empirical Coordinate Transformations[J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(2): 373-383.

[9] SCHAFFRIN B, FELUS Y A. Multivariate Total Least-squares Adjustment for Empirical Affine Transformations[J]. International Association of Geodesy Symposia, 2008, 132(3): 238-242.

[10] LU Jue, CHEN Yi, ZHENG Bo. Applying Total Least Squares to Three-dimensional Datum Transformation[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2008, 28(5): 77-81. (陆珏,陈义,郑波. 总体最小二乘方法在坐标转换中的应用[J]. 大地测量与地球动力学, 2008, 28(5): 77-81.)

[11] SHEN Y Z, LI B F, CHEN Y. An Iterative Solution of Weighted Total Least-squares Adjustment[J]. Journal of Geodesy, 2010, 85(4): 229-238.

[12] WEI Musheng. Generalized Total Least Square Methods and Calculation[M]. Beijing: Science Press, 2006: 34-40. (魏木生. 广义最小二乘问题的理论和计算[M]. 北京:科学出版社, 2006: 34-40.)

(责任编辑:宋启凡)

收稿日期: 2011-01-31

修回日期: 2011-03-21

第一作者简介: 袁庆(1986—),男,硕士生,研究方向为测量数据处理。

First author: YUAN Qing(1986—), male, postgraduate, majors in surveying data processing.

E-mail: 15531422@qq.com