第34卷 第1期
2005年2月

测 绘 学 报
ACTA GEODAETICA et CARTOGRAPHICA SINICA

Vol. 34, No. 1
Feb., 2005

文章编号: 1001-1595(2005)01-0014-05　　中图分类号: P223　　文献标识码: A

边值问题虚拟压缩恢复原理及其在Bjerhammar理论中的一个应用

申文斌[1,2], 宁津生[1,2], 晁定波[1]

(1. 武汉大学 测绘学院, 湖北 武汉 430079; 2. 武汉大学 地球空间环境与大地测量教育部重点实验室, 湖北 武汉 430079)

The Fictitious Compress Recuperation Principle in Boundary Value Problems and Its Application in Bjerhammar's Theory

SHEN Wen-bin[1,2], NING Jin-sheng[1,2], CHAO Ding-bo[1]

(1. *School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan* 430079, *China*; 2. *Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan* 430079, *China*)

Abstract: The fictitious compress recuperation method is further developed, so that it is suitable for any regular harmonic function u. For an arbitrary finite body Ω with a simply closed surface, if the boundary value $u|_{\partial\Omega}$ was given, and it is assumed that the function u is harmonic in the region outside the body and regular at infinity, one can precisely and strictly determine the external field u by using the idea of the fictitious compress recuperation. Hence, it is reasonable to generalize the method of the fictitious compress recuperation into the corresponding principle. Furthermore, as an application example, the fictitious gravity anomaly required in Bjerhammar's theory is simply derived out, based on the principle of the fictitious compress recuperation.

Key words: regular harmonic function; fictitious compress recuperation; determination of external field; determination of the fictitious gravity anomaly

摘　要: 在引力位虚拟压缩恢复法的基础上, 进一步发展该法, 使其适合于任意一个正则调和函数 u。对于任意一个有限单连通形体 Ω(其边界是简单封闭曲面), 假如给定了边值 $u|_{\partial\Omega}$, 并且假定 u 在上述形体的外部调和, 在无穷远处正则, 则可根据虚拟压缩恢复思想精确而严密地求出整个外部空间的 u 场。于是, 可将虚拟压缩恢复法提升为虚拟压缩恢复原理。作为一个应用实例, 本文简明地给出了 Bjerhammar 理论所需要的虚拟重力异常。

关键词: 正则调和函数; 虚拟压缩恢复; 外部场的确定; 虚拟重力异常求解

1　引　言

为了克服Stokes方法的不完善性(因涉及质量调整问题而不能精确求解)、Molodensky 方法和Bjerhammar方法的近似性以及级数收敛性所遇到的困难, 为了精确而严密地确定地球外部重力场, 文献[1]提出了引力位虚拟压缩恢复法, 证明了引力位级数解的一致收敛性[2]; 随后, 文献[3]则指出了引力梯度场虚拟压缩恢复法。大体上说, 虚拟压缩恢复法的基本思想如下: 将位函数

收稿日期: 2004-05-09; 修回日期: 2004-07-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40374004, 40174004); 国家教育部博士点专项基金资助项目(20010486013)
作者简介: 申文斌(1960-), 男, 新疆昌吉人, 博士, 教授, 博导, 主要研究方向是大地测量和地球物理。

V(以引力位为例)在地球表面的边界值 $V|_{\partial\Omega}$(其中 $\partial\Omega$ 表示地球的边界)沿径向等值地压缩到地球内部的一个虚拟球 K 的球面 ∂K 上, 利用 Poisson 积分公式给出圆球外部的正则调和解 $V^{*(1)}$; 将 $V^{*(1)}$ 在地球边界上的值 $V^{*(1)}|_{\partial\Omega}$ 与真实边界值 $V|_{\partial\Omega}$ 比较, 得到差值 $V|_{\partial\Omega}-V^{*(1)}|_{\partial\Omega}$, 将该差值再沿径向等值地压缩到球面 ∂K 上, 又得到一个在圆球外部的正则调和解 $V^{*(2)}$; 如此进行下去, 便得到了一个在虚拟球的外部调和、在无穷远处正则的一致收敛的虚拟引力位级数解[1,2]

$$V^{*}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}V^{*(n)}(P),\quad P\in\overline{K}$$

其中, K 表示虚拟球的外部空间; 当把上述级数解限定在地球外部空间(包括地球边界)时, 它与地球的真实引力位场完全一致, 从而也就精确、严格地求出了地球外部的引力位场。上述思想可以推广, 使其适合于任意的正则调和函数类: 只要给定了边界值, 即可按照虚拟压缩恢复思想精确求定外部场。推广之后的虚拟压缩恢复法具有较为广泛的应用, 诸如确定重力场、地磁场、地电场等等, 因而有理由将虚拟压缩恢复法提升为虚拟压缩恢复原理。

2　虚拟压缩恢复原理

选取任意一个(具有简单封闭表面的)有限单连通形体或实体(如地球) Ω, 也用该符号表示该形体所占据的空间域, 它是一个开域(因而不包括边界), 其边界 $\partial\Omega$(即上述域的极限边界)与圆球面之间存在连续双射。问题如下:

假定在上述形体外部分布有某种静态场 u(诸如引力位场, 电磁位场等等), 它完全起源于形体本身, 并且是调和的、在无穷远处正则的函数; 今给定了边值 $u|_{\partial\Omega}$(或给定 $\partial u/\partial x_i|_{\partial\Omega}$, 或 $\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j|_{\partial\Omega}$), 如何精确求定外部空间静态场 $u(P)$?

上述解的存在性、唯一性以及稳定性已是众所周知的事实。对于一般的形体, 利用 Green 定理只能给出形式解, 因为所涉及的 Green 函数通常无法求出; 当形体是圆球时, 利用 Green 定理便得到了著名的也是严格的 Poisson 积分公式。在一般情况下, 在不能得到解析解时, 人们通常采用球谐级数展开法。然而, 球谐展开级数在形体的表面附近未必收敛; 另一方面, 面对无穷多球谐系数, 通常不得不采用截断法, 这必然会导致误差。若采用虚拟压缩恢复思想[1,2], 则能精确而严格地确定外部场。

选取一个半径为 R 的虚拟球, 或称之为 Bjerhammar 球 K[4], 它是一开集, 其边界记为 ∂K, 它被完全包含在形体 Ω 中, K 的中心与 Ω 的几何中心重合。只要构造出一个函数 u^{*}, 它在 K 的整个外部空间 $\overline{K}$ 满足

$$\begin{aligned}&\Delta u^{*}(P)=0,\quad P\in\overline{K}\\&u^{*}(P)|_{\partial K}=u^{*}_{\partial K}\\&\lim_{P\to\infty}u^{*}(P)=0\end{aligned}\qquad(1)$$

其中, Δ 是 Laplace 算符, 而在形体的边界 $\partial\Omega$ 上, u^{*} 具有与 u 相同的值, 即

$$u^{*}(P)|_{\partial\Omega}\equiv u(P)|_{\partial\Omega}\qquad(2)$$

那么, 在形体的整个外部空间 $\overline{\Omega}$(它包括边界 $\partial\Omega$), u^{*} 必定与真实场 u 一致, 因为满足同样边界条件的正则调和函数是惟一的[5,6]。

为此, 基于文献[1,2]的研究结果, 令

$$\begin{aligned}&T^{(0)}(P)\equiv u(P)\\&T^{(n)}(P)=T^{(n-1)}(P)-u^{*(n)}(P),\quad P\in\overline{\Omega},\quad n\geqslant 1\end{aligned}\qquad(3)$$

其中, $T^{(n)}(P)$ 称为 n 阶残差场, 只在形体的外部区域 $\overline{\Omega}$ 中有定义(而零阶残差场 $T^{(0)}(P)$ 被定义为外部的真实场 u), 在形体边界上的值可表示成

$$\begin{aligned}&T^{(0)}(P)_{\partial\Omega}\equiv u(P)_{\partial\Omega}\\&T^{(n)}(P)_{\partial\Omega}=T^{(n-1)}(P)_{\partial\Omega}-u^{*(n)}(P)_{\partial\Omega},\ n\geqslant 1\end{aligned}\qquad(4)$$

将 $n-1$ 阶残差场在边界上的值 $T^{(n-1)}(P)|_{\partial\Omega}$ 沿径向等值地压缩到虚拟球面 ∂K 上(这里实际上是从 $\partial\Omega$ 到 ∂K 的单位恒等延拓), 寻求如下边值问题

$$\begin{aligned}&\Delta u^{*(n)}(P)=0,\quad P\in\overline{K}\\&u^{*(n)}(P)|_{\partial K}=T^{(n-1)}(P)_{\partial\Omega}\\&\lim_{P\to\infty}u^{*(n)}(P)=0,\quad n\geqslant 1\end{aligned}\qquad(5)$$

的解, 其解由 Poisson 积分公式

$$u^{*(n)}=\frac{r^2-R^2}{4\pi R}\int_{\partial K}\frac{u^{*(n)}}{l^3}\mathrm{d}\sigma\equiv\frac{r^2-R^2}{4\pi R}\int_{\partial K}\frac{T^{(n-1)}_{\partial\Omega}}{l^3}\mathrm{d}\sigma,\quad P\in\overline{K},\quad n\geqslant 1\qquad(6)$$

给出[6], 它是在虚拟球的外部空间 $\overline{K}$ 中调和并在无穷远处正则的函数, 当把它限定在形体的外部空间区域 $\overline{\Omega}$ 之后, 可将此函数作为 $n-1$ 阶残差场 $T^{(n-1)}(P)$ 的一级近似, 或者, 可将 $u^{*(1)}(P)+u^{*(2)}(P)+\cdots+u^{*(n)}(P)$ 作为真实场 u 的 n

级逼近。于是, 得到了一个在虚拟球域之外部的级数解

$$u^{*}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}u^{*(n)}(P),\ P\in\overline{K} \qquad (7)$$

它在边界 ∂K 上有

$$u^{*}\mid_{\partial K}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}T^{(n)}\right)\mid_{\partial\Omega}$$

文献[1]的研究表明, 如果由(7)给出的级数是一致收敛的, 那么, 虚拟场 $u^{*}(P)$ 在上述形体的外部就与真实场 $u(P)$完全一致, 即有

$$u^{*}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}u^{*(n)}(P)\equiv u(P),\ P\in\overline{\Omega} \qquad (8)$$

从而也就通过虚拟压缩恢复思想精确、严格地求出了外部场 u。

3 级数解的一致收敛性论证

如果 u 是引力位函数 V, 文献[2] 已经证明(7) 是一致收敛的。在文献[2] 的证明中, 除了利用了引力位函数 V 的正则调和性之外, 还利用了它的非负特性(按通常的引力位定义 $V=G\int_{\Omega}(\rho/l)\,\mathrm{d}\tau$ 理解, 其中 G 是引力常数, ρ是物质密度, l 是积分元$\mathrm{d}\tau$至场点P 的距离)。除此之外, 没有引进任何假设。于是可以立即推出, 对于任意一个非负的正则调和函数 U, 若令 $u=U$, 则式(7) 是一致收敛的。

现在假定 u 是非常一般的正则调和函数。首先指出, 它不可能是常数, 除非是零, 否则不满足正则性。我们对 $u\equiv 0$ 的情形不感兴趣。因此, u 只可能处于下列三种情形之一:

1. u 是非负的正则调和函数;
2. u 是非正的正则调和函数;
3. u 是可正可负的正则调和函数。

对于情形 1, 前面已经指出, 式(7)是一致收敛的。对于情形 2, 将 u 反号之后, 由$-u$ 得到的级数序列式(7)是一致收敛的。由于该级数的一致收敛性, 负号可以搬运到求和号内部并分配于每一项, 或者反过来, 可以从每一项提出一个负号并将该负号提到求和号之外[7]。因此, 就 u 函数本身而言, 级数序列(7)是一致收敛的。

对于情形 3, 情况复杂一些。u 是正则调和函数, 因而其最大和最小值必在边界 $\partial\Omega$ 上达到[5,6], 而且一正一负(因为 u 已不属于 1 或 2 情形, 同时注意到它在无穷远处为零), 分别以 Max 和 Min 表示(Max> 0; Min< 0)。由于 $1/r$ 是非负正则调和函数, 因而

$$U(P)=-\mathrm{Min}\,\frac{R_{\max}}{r},\ P\in\overline{\Omega} \qquad (9)$$

是非负正则调和函数, 其中 $R_{\max}$ 是坐标原点至边界面 $\partial\Omega$ 的最大距离。由此可以构造一个新的非负的正则调和函数:

$$u'(P)=u(P)+U(P),\ P\in\overline{\Omega} \qquad (10)$$

这一点不难论证, 因为它的最大值和最小值只能在边界上达到(在无穷远处为零), 而现在, 最大值和最小值均是非负的。于是, 就函数 $u'(P)$ 而言, 可以得到一个相应的虚拟压缩恢复解:

$$u'^{*(P)}=\sum_{n=1}^{\infty}u'^{*(n)}(P),\ P\in\overline{K} \qquad (11)$$

根据前面的讨论, 它是一致收敛的。另一方面, 根据式(10), 又可以得到如下表示

$$u'^{*}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[u^{*(n)}(P)+U^{*(n)}(P)\right],\ P\in\overline{K} \qquad (12)$$

由于上述级数的一致收敛性, 上式又可以写成

$$u'^{*}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}u^{*(n)}(P)+\sum_{n=1}^{\infty}U^{*(n)},\ P\in\overline{K} \qquad (13)$$

根据式(9), U 是非负的正则调和函数, 因而

$$U^{*}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}U^{*(n)},\ P\in\overline{K} \qquad (14)$$

是一致收敛的。这表明,

$$u^{*}(P)=\sum_{n=1}^{\infty}u^{*(n)},\ P\in\overline{K} \qquad (15)$$

是一致收敛的。

至此, 证明了如下结论: 对于任意一个正则调和函数 u(未知), 只要给定了边界值 $u(P)\mid_{\partial\Omega}$, 即可构造出在虚拟球外部一致收敛的虚拟压缩恢复级数解 $u^{*}(P)$, 它由方程(7)给出; 当把它限定在所论形体的外部时, 它与真实场 $u(P)$完全重合, 因而也就得到了精确严格解 $u(P)$, 它由式(8)给出。

4 一个应用实例

为了确定地球外部重力场, Bjerhammar 曾经提出了一种虚拟重力异常法[4], 其基本思想是选定一个 Bjerhammar 球, 它位于地球的内部, 假想在上述球面上分布有虚拟重力异常 g^{*}, 要求由此而产生的外部重力异常在地球表面正好与真实重力异常(观测值)一致。如果求出了虚拟重力异常, 就可将以地面(或似地形表面)为边界的

Molodensky 问题转化为以球面为边界的 Poisson 积分问题。按 Bjerhammar 理论, 为了确定虚拟重力异常, 需要采用逐步迭代过程求解积分方程(因虚拟重力异常处于被积分位置), 由此求得的虚拟重力异常解是一个级数, 但这一求解过程相当繁杂。若按虚拟压缩恢复原理, 则可简明地求出 Bjerhammar 理论所需要的虚拟重力异常。

4.1　虚拟重力异常的求定

设 Δg 是重力异常, 那么, $r\Delta g$ 的正则性是显然的[8]。在 Stokes 理论中, 重力异常是大地水准面上的重力值与相应的平均椭球面上的正常重力值之差[8]; 在 Molodensky 理论和 Bjerhammar 理论中, 重力异常是地面上的重力值与相应的似地形表面上的正常重力值之差[4,9,10]。按照通常的观念, 在地球外部空间 $r\Delta g$ 也是调和的[4,8,9]。既然 $r\Delta g$ 是正则调和函数, 我们即可按虚拟压缩恢复原理求出虚拟场 $(r\Delta g)^*(P)$:

$$(r\Delta g)^*(P) = \sum_{n=1}^{\infty}(r\Delta g)^{*(n)}(P),\quad P\in\overline{K} \tag{16}$$

它是一致收敛的正则调和函数, 在虚拟球边界 ∂K 上的取值为

$$(r\Delta g)^*\mid_{\partial K} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}T^{(n)}\right)\Big|_{\partial\Omega} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}T^{(n)}\mid_{\partial\Omega} \tag{17}$$

其中

$$(r\Delta g)^{*(n)}(P) = \frac{r^2-R^2}{4\pi R}\int_{\partial K}\frac{(r\Delta g^{*(n)})}{l^3}\mathrm{d}\sigma \equiv \frac{r^2-R^2}{4\pi R}\int_{\partial K}\frac{T_{\partial\Omega}^{(n-1)}}{l^3}\mathrm{d}\sigma,\quad P\in\overline{K},\quad n\geqslant 1 \tag{18}$$

$$T^{(0)}(P)\equiv r\Delta g(P)$$

$$T^{(n)}(P)= T^{(n-1)}(P)-(r\Delta g)^{*(n)}(P)\qquad P\in\overline{\Omega},\quad n\geqslant 1 \tag{19}$$

$$T^{(0)}(P)\mid_{\partial\Omega}\equiv(r\Delta g)(P)\mid_{\partial\Omega}$$

$$T^{(n)}(P)\mid_{\partial\Omega}= T^{(n-1)}(P)\mid_{\partial\Omega}-(r\Delta g)^{*(n)}(P)\mid_{\partial\Omega},\ n\geqslant 1 \tag{20}$$

在地球边界上,

$$(r\Delta g)^*(P)\mid_{\partial\Omega}\equiv(r\Delta g)(P)\mid_{\partial\Omega} \tag{21}$$

因而, 当把虚拟场 $(r\Delta g)^*(P)$ 限定在地球外部空间(包括地球边界)时, 它与真实场 $(r\Delta g)(P)$ 完全重合。式(21)又可以写成

$$\Delta g^*(P)\mid_{\partial\Omega}\equiv\Delta g(P)\mid_{\partial\Omega} \tag{22}$$

由式(17)便得到了假想的分布于虚拟球面上的虚拟重力异常 $\Delta g^*(P)$:

$$\Delta g^*\mid_{\partial K} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}T^{(n)}\mid_{\partial\Omega} \tag{23}$$

其中, R 是虚拟球半径, $T^{(0)}(P)\mid_{\partial\Omega}$ 以及 $T^{(n)}(P)\mid_{\partial\Omega}(n\geqslant 1)$ 由式(20)给出, 前者是已知观测值, 后者则是通过连续不断的“压缩恢复”得到的。

由式(23)给出的假想的发布于虚拟球面上的虚拟重力异常是一致收敛的, 由此所产生的场在地球外部与真实重力异常场重合。这样, 便简洁地给出了 Bjerhammar 所寻求的虚拟重力异常分布。若直接按 Bjerhammar 方法求解虚拟重力异常分布, 则要复杂得多, 而且不能保证所得到的级数解是一致收敛的。

文献[1]的一个简例显示, 只要虚拟球选得尽量接近地球(但仍然被地球完全包围), 比如取 R = 6 340 km, 那么, 虚拟级数解的收敛速度非常快, 只要取前面的 4~ 5 项就足够了, 这时, 由所忽略的或截断的(无穷多)项所引起的误差已经远远小于测量误差。从理论上来说, 所得到的一致收敛的解与所选取的虚拟球的大小无关, 只要虚拟球被完全包含在地球之内、并且球心与地球质心(也是坐标系原点)重合即可。

4.2　注　释

严格说来, $r\Delta g(P)$ 并非调和函数[3]。但如果承认物理大地测量基本微分方程, 则相当于承认了 $r\Delta g(P)$ 的调和性。如果物理大地测量基本微分方程近似成立, 则 $r\Delta g(P)$ 的调和性也近似成立。实际上, 无论是 Stokes 理论, Molodensky 理论, 还是 Bjerhammar 理论, $r\Delta g(P)$ 都是被当成正则调和函数来处理的。因此, 本文给出的结果是在假定 $r\Delta g(P)$ 具有调和性这一前提之下的。就确定重力场而言, 更为严密的处理办法是将虚拟压缩恢复原理应用于扰动重力 $\delta g(P)$, 扰动重力是扰动位 T 的梯度:

$$\delta g(P)= \Delta[W(P)-U(P)] \tag{24}$$

其中, r 是梯度算符(或称 Nabla 算符), $W(P)$ 和 $U(P)$ 分别是场点的重力位和正常重力位, 它们包含有相同的离心力位 Q, 因而又可将上式改写成

$$\delta g(P)= \Delta[V(P)-V_0(P)] \tag{25}$$

其中, $V(P)$ 和 $V_0(P)$ 分别是场点处的引力位和正常引力位。由此可以看出, 扰动重力的每个(直

角坐标)分量是正则调和函数(其证明是简单的),因而可以根据地面边界上的扰动重力、应用虚拟压缩恢复原理求出整个外部空间的扰动重力场。不过,这已经偏离了确定 Bjerhammar 理论所需要的"虚拟重力异常"的主题。

5 讨 论

地球实体产生的引力位 V、稳恒磁位 V_m 以及静电位 V_e 均为正则调和函数(在地球外部),因而可以采用虚拟压缩恢复原理精确确定地球外部的引力位场、稳恒磁位场以及静电位场,假如事先分别给定了边界值 $V|_{\partial\Omega}$、$V_m|_{\partial\Omega}$以及 $V_e|_{\partial\Omega}$的话。有了位场,通过梯度运算即可得到相应的力场(引力场、磁场以及电场)。

如果给定了边界面上的引力矢量、稳恒地磁矢量或静地电矢量,也可以利用虚拟压缩恢复原理严格求出地球外部的引力场、稳恒地磁场或静地电场,因为这些场量分量(在直角坐标系下)是正则调和函数。同理,如果给定了边界上的高阶(二阶或二阶以上)梯度值 $\partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_k}u|_{\partial\Omega}$,则可求出相应的地球外部的高阶梯度场,然后通过积分过程给出所需要的场(以无穷远处为零作为初值条件)[3]。

利用虚拟压缩恢复原理可以对 Runge 定理[10]、Runge-Krarup 定理[10~12]、Keldysh-Lavrentiev 定理[10,12,13]给出非常简明的证明。上述几个定理可简单归纳为:对于定义在域 A 中的任意一个正则调和函数 f 以及事先给定的任意小的正数 ε,存在一个定义在更大的域 B(域 B 包含域 A)中的调和函数 F,使得下式成立

$$|F(P)-f(P)|<\varepsilon,\quad P\in A$$

对上述几个定理的证明已超出了本文的范围,我们将专门撰文讨论。实际上,利用虚拟压缩恢复原理不仅可以证明上述几个定理,而且能给出更多的东西:可以直接求出在域 A 中与 f 重合的正则调和函数 F,而 F 定义在更大的域 B 之中。

虚拟压缩恢复原理也可以应用于求解内部问题,基本思想完全相同,只不过所选的虚拟球面要包围整个边界,而不是像在处理外部问题时虚拟球要被边界所围。

参考文献:

[1] SHEN Wen-bin. Fictitious Compress Recuperation of Gravitational Potential[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2004, 29(8): 720-724. (in Chinese)

[2] SHEN Wen-bin. The Proof of the Uniform Convergence of the Series Solution about the Fictitious Compress Recuperation of Gravitational Potential[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2004, 29(9). (in Chinese)

[3] SHEN Wen-bin, NING Jin-sheng. The Fictitious Compress Recuperation Method for Determining the Earth's External Gravity Field[J]. Journal of Surveying Science, 2004, 29, (2): 37-40. (in Chinese)

[4] BJERHAMMAR A. A New Theory of Geodetic Gravity[R]. Stockholm: Trans. Roy. Institute Technology, 1964.

[5] GU Chao-hao, LI Da-qian, CHEN Ru-hang, *et al.* Mathematical and Physical Equation [M]. Beijing: People's Education Press, 1979. (in Chinese)

[6] YJELSON F. Potential Theory and Its Applications in the Theory of the Earth's Figure and Geophysics [M]. Beijing: Science Press, 1963. (in Chinese)

[7] FYHEDENGORZ K M. The Differentiation and Integration Course ㈢(2) [M]. Beijing: People's Education Press, 1954. (in Chinese)

[8] HEISKANEN W A, MORITZ H. Physical Geodesy [M]. San Francisco: Freeman and Company, 1967. 35, 92-94, 288-291.

[9] MOLODENSKY M S, EREMEEV V F, YURKINA M I. Methods for Study of the External Gravitation Field and Figure of the Earth[R]. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1962.

[10] MORITZ H. Advanced Physical Geodesy[M]. Karlsruhe: Wichmann, 1980.

[11] KRARUP T. A Contribution to the Mathematical Foundation of Physical Geodesy[R]. Copenhagen: Dan Geod Inst, 1969.

[12] KRARUP T. On Potential Theory: Methoden und Mannheim[M]. [s.l.]: W I Wissenschaftsverlag, 1975.

[13] BJERHAMMAR A. Discrete Approaches to the Solution of the Boundary Value Problem in Physical Geodesy[J]. Boll Geod Sci Affini, 1975, (34): 185-240.