

地球主惯性矩

魏子卿

(西安测绘研究所, 陕西 西安 710054)

Earth's Principal Moments of Inertia

WEI Zi-qing

(Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xian 710054, China)

Abstract: The Earth's principal moments of inertia are the geodetic and astronomical fundamental Earth parameters. The paper is devoted to the Earth's principal moments of inertia and the related issues. Section 1 formulates the Earth's principal moments of inertia and the Earth's flattening; Section 2 deals with the computation of the second-degree harmonic coefficients in the principal axes coordinate system; Section 3 studies the directions of the Earth's principal axes of inertia, and Section 4 presents the numerical values of the Earth's principal moments of inertia, and of the orientations of the Earth's principal axes of inertia, and of the Earth's flattening.

Key words: second-degree harmonic coefficients; earth's principal axes of inertia; earth's principal moments of inertia; earth's figure

摘 要: 地球主惯性矩属于大地测量学和天文学的基本地球参数。研究地球主惯性矩及有关问题。第一节研究主惯性矩和地球扁率的计算公式; 第二节研究主惯性轴坐标系中 2 阶位系数的计算; 第三节研究地球主惯性轴方向的确定方法, 第四节给出地球主惯性矩、主惯性轴方向和地球扁率的数值结果。

关键词: 2 阶位系数; 地球主惯性轴; 地球主惯性矩; 地球形状

地球主惯性矩是地球对于主惯性轴的转动惯量, 是地球转动惯性大小的度量。地球主惯性矩是大地测量学和天文学的基本地球参数。其反映地球的实际形状和质量分布, 研究地球主惯性矩有助于了解地球形状, 也有助于了解地球的密度分布。

本文重点研究主惯性矩的计算和主惯性轴方向的确定。本文第一节推演计算主惯性矩和地球扁率的公式; 第二节研究将非主惯性轴坐标系的 2 阶位系数化为主惯性轴坐标系的算法, 地球惯性矩可径由主惯性轴坐标系的 2 阶位系数计算。

第三节研究地球主惯性轴的方向, 给出求定主惯性轴方向余弦和定向的算法和公式。第四节利用实际数据计算地球主惯性矩的大小和主惯性轴的方向, 计算地球的极扁率和赤道扁率, 给出数值结果, 并进行初步分析, 以证明得到的主惯性矩值比较可靠。

1 地球主惯性矩与地球形状

众所周知, 地球外部一点的 2 阶引力位 V_2 可以表示为

$$V_2 = - \frac{GMa^2}{r^3} \sum_{m=0}^2 (J_{2m} \cos m\lambda + k_{2m} \sin m\lambda) \cdot P_{2m}(\sin \varphi) \quad (1)$$

式中, GM 为地心引力常数, a 为椭球的长半径; r, φ, λ 为所考虑点的球坐标(地心距、地心纬度和经度); $P_{2m}(\sin \varphi)$ 为非正规化缔合勒让德函数; $J_{2m}, K_{2m}, m = 0, 1, 2$, 为非正规化 2 阶 m 次位系数, 理论上可用下式表示(参见文献[1]中式(2-38), (2-39)和(2-40)):

$$J_{20} = J_2 = - \frac{1}{Ma^2} \iiint p_{20}(\sin \varphi) dM \quad (2a)$$

$$J_{21} = - \frac{1}{3Ma^2} \iiint^2 \cos \lambda p_{21}(\sin \varphi) dM \quad (2b)$$

$$K_{21} = - \frac{1}{3Ma^2} \iiint^2 \sin \lambda p_{21}(\sin \varphi) dM \quad (2c)$$

$$J_{22} = - \frac{1}{12Ma^2} \iiint^2 \cos 2\lambda p_{22}(\sin \varphi) dM \quad (2d)$$

$$K_{22} = - \frac{1}{12Ma^2} \iiint^2 \sin 2\lambda p_{22}(\sin \varphi) dM \quad (2e)$$

式中, M 为地球的质量, a 为地球的赤道半径, 积分域为整个地球。经简单推演, 有^[1]

$$J_{20} = J_2 = \frac{C - \frac{A+B}{2}}{Ma^2} \quad (3a)$$

$$J_{21} = K_{21} = 0 \text{ (假定 } z \text{ 轴与地球平均旋转轴重合)} \quad (3b)$$

$$J_{22} = \frac{A - B}{4Ma^2} \quad (3c)$$

$$K_{22} = - \frac{D}{2Ma^2} \quad (3d)$$

其中, A, B, C 代表地球对于 x, y, z 轴的惯性矩, D 代表 x, y 惯性积, 分别由下式定义:

$$A = \iiint (y^2 + z^2) dM$$

$$B = \iiint (z^2 + x^2) dM \quad (4a)$$

$$C = \iiint (x^2 + y^2) dM$$

$$D = \iiint xy dM \quad (4b)$$

如果进一步让 x, y 轴与相应的地球主惯性轴重合, 则 x, y 惯性积等于零, 即 $D = 0$ 。所以, 在主惯性轴坐标系 ABC 中, $K_{22} = 0$ (见式 3(d))。

让我们推演主惯性矩的算式。将式(3a)改写为

$$J_2 = \frac{C - A + \frac{A - B}{2}}{Ma^2} = \frac{C - A}{Ma^2} + \frac{A - B}{2Ma^2} =$$

$$\frac{C - A}{Ma^2} + 2J_{22}$$

由此

$$\frac{C - A}{Ma^2} = J_2 - 2J_{22} \quad (5)$$

另外

$$\frac{C - B}{Ma^2} = \frac{C - A}{Ma^2} + \frac{A - B}{Ma^2} =$$

$$J_2 - 2J_{22} + 4J_{22} = J_2 + 2J_{22} \quad (6)$$

假定除 2 阶位系数 J_2 和 J_{22} 外还知道另一物理量——动力扁率或力学扁率^[1,2]

$$H = \frac{C - \frac{A+B}{2}}{C} \quad (7)$$

则主惯性矩 A, B, C 便可以确定。事实上, 根据式(3a), (5)~(7), 有

$$\frac{C}{Ma^2} = \frac{J_2}{H} \quad (8)$$

$$\frac{B}{Ma^2} = \frac{J_2}{H} - (J_2 + 2J_{22}) \quad (9)$$

$$\frac{A}{Ma^2} = \frac{J_2}{H} - (J_2 - 2J_{22}) \quad (10)$$

假定知道地球质量 M ($M = GM/G$, GM 为地心引力常数, G 为牛顿引力常数), 利用式(8-10)最后即可算出主惯性矩 A, B, C 。

从式(9), (10)看出, 由于 J_{22} 为负, 所以 $C > B > A$ 。

地球的形状接近 3 轴椭球体, 其 3 轴分别与主惯性轴 A, B, C 重合。至一级近似, 在 C, A 平面的扁率可按式计算^[1]

$$f_p = \frac{3}{2} \frac{C - A}{Ma^2} + \frac{m}{2} \quad (11)$$

式中, $m = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$, ω 为地球旋转角速度。用式(5)代入式(11), 则有

$$f_p = \frac{3}{2} (J_2 - 2J_{22}) + \frac{m}{2} \quad (11')$$

类似地, 至一级近似, 在 C, B 平面的扁率为

$$f_p' = \frac{3}{2} \frac{C - B}{Ma^2} + \frac{m}{2} = \frac{3}{2} (J_2 + 2J_{22}) + \frac{m}{2} \quad (12)$$

在 A, B 平面(赤道面)的扁率为

$$f_e = \frac{3}{2} \frac{B - A}{Ma^2} = -6J_{22} \quad (13)$$

在式(13)中没有 $m/2$ 项, 是因为地球没有绕 A 或 B 轴的旋转。

2 主惯性轴坐标系中 2 阶位系数的计算

已知主惯性轴坐标系的 2 阶位系数 J_2, J_{22}

(其余 3 个 2 阶系数为 0) 是确定主惯性矩的前提。而引力位模型一般给出参考于非主惯性轴坐标系(例如, EGM 96 参考于 JGM-2 坐标系)的完全正规化系数 $\bar{C}_{2m}, \bar{S}_{2m}, m = 0, 1, 2$ 。因而, 需要将非主惯性轴坐标系 xyz 的完全正规化系数 $\bar{C}_{2m}, \bar{S}_{2m}$ 化算为主惯性轴坐标系 ABC 的位系数 J_2, J_{22} 。

在非主惯性轴坐标系, 以完全正规化位系数表示的 2 阶引力位 V_2 的形式是

$$V_2 = \frac{GMa^2}{r^3} \sum_{m=0}^2 (\bar{C}_{2m} \cos m\lambda + \bar{S}_{2m} \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{2m}(\sin \varphi) \tag{14}$$

式中, $\bar{P}_{2m}(\sin \varphi)$ 为完全正规化缔合勒让德函数, 将其熟知的表达式代入, 并将球坐标 φ, λ, r 换为直角坐标 x, y, z , 则式(14)可化为如下形式^[3]:

$$V_2 = \frac{\sqrt{15} GMa^2}{2 r^5} \mathbf{r}^T \mathbf{H} \mathbf{r} \tag{15}$$

$$\mathbf{r} = (x \quad y \quad z)^T \tag{16}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{22} - \frac{\bar{C}_{20}}{\sqrt{3}} & & \bar{S}_{22} & \bar{C}_{21} \\ & \bar{S}_{22} & -\bar{C}_{22} - \frac{\bar{C}_{20}}{\sqrt{3}} & \bar{S}_{21} \\ \bar{C}_{21} & & \bar{S}_{21} & 2\frac{\bar{C}_{20}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{17}$$

在主惯性轴坐标系中, 式(15), (16), (17)相应地变为

$$V_2 = \frac{\sqrt{15} GMa^2}{2 r^5} \mathbf{r}^T \mathbf{H} \mathbf{r} \tag{18}$$

$$\mathbf{r} = (x \quad y \quad z)^T \tag{19}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{22} - \frac{\bar{A}_{20}}{\sqrt{3}} & & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{A}_{22} - \frac{\bar{A}_{20}}{\sqrt{3}} & & 0 \\ 0 & & 0 & 2\frac{\bar{A}_{20}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{20}$$

式中, $\bar{A}_{20}, \bar{A}_{22}$ 表示主惯性轴坐标系中的完全正规化 2 阶位系数, \mathbf{r} 为所考虑点在主惯性轴坐标系中的位置向量。由线性代数知, 式(15)化为式(18)实质上是对二次型 $\mathbf{r}^T \mathbf{H} \mathbf{r}$ 的变量 \mathbf{r} 施行一个正交矩阵 \mathbf{Q} 的线性变换 $\mathbf{r} = \mathbf{Q} \mathbf{r}'$ 。 \mathbf{r}' 的二次型为 $\mathbf{r}'^T \mathbf{H} \mathbf{r}'$, 其中 \mathbf{H} 为对角阵, 如式(20)所示。 \mathbf{H} 的主对角元素 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为矩阵 \mathbf{H} 的特征值, 即

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \bar{A}_{22} - \frac{\bar{A}_{20}}{\sqrt{3}} \\ \lambda_2 &= -\bar{A}_{22} - \frac{\bar{A}_{20}}{\sqrt{3}} \\ \lambda_3 &= 2\frac{\bar{A}_{20}}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{21}$$

容易证明, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ 。由式(21)得

$$\bar{A}_{20} = \frac{\sqrt{3} \lambda_3}{2} \tag{22}$$

$$\bar{A}_{22} = \lambda_1 + \frac{\bar{A}_{20}}{\sqrt{3}} = -\lambda_2 - \frac{\bar{A}_{20}}{\sqrt{3}}$$

为得到特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 需要解特征方程:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{H}| = 0 \tag{23}$$

式中, \mathbf{E} 为 3×3 的单位矩阵。将行列式(23)展开, 得三次方程

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0 \tag{24}$$

其中

$$p = -\bar{C}_{20}^2 - \bar{C}_{21}^2 - \bar{S}_{21}^2 - \bar{C}_{22}^2 - \bar{S}_{22}^2 \tag{25}$$

$$q = -\frac{2\bar{C}_{20}^3}{3\sqrt{3}} - \frac{\bar{C}_{20}}{\sqrt{3}}(\bar{C}_{21}^2 + \bar{S}_{21}^2 - 2\bar{C}_{22}^2 - 2\bar{S}_{22}^2) - \bar{C}_{22}(\bar{C}_{21}^2 - \bar{S}_{21}^2) - 2\bar{C}_{21}\bar{S}_{21}\bar{S}_{22} \tag{26}$$

判别式 $D = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} < 0$, 三次方程式(24)有 3 个实根:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2t \sin \left[\frac{\beta}{3} + \frac{\pi}{3} \right] \\ \lambda_2 &= -2t \sin \beta \\ \lambda_3 &= 2t \sin \left[\frac{\beta}{3} - \frac{\pi}{3} \right] \end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$t = \sqrt{-\frac{p}{3}} \tag{28}$$

$$\sin \beta = -\frac{q}{2t^3}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \tag{29}$$

根据式(22)得到 $\bar{A}_{20}, \bar{A}_{22}$ 后, 将其化为非正规化系数

$$\begin{aligned} J_2 &= -A_{20} = -\sqrt{5} \bar{A}_{20} \\ J_{22} &= -A_{22} = -\sqrt{\frac{5}{12}} \bar{A}_{22} \end{aligned} \tag{30}$$

以上是主惯性轴坐标系 J_2, J_{22} 的严密算法。下面给出近似算法。由式(2a)知, J_2 与 $\sin^2 \varphi$ 有关。由于非主惯性轴坐标系 xyz 与主惯性轴坐标系 ABC 的赤道面之间的夹角通常很小, 可以认为 J_2 与坐标系无关, 因而可认为坐标系 xyz 中的

J_2 实际上等于坐标系 ABC 中的 J_2 , 即

$$(J_2)_{ABC} = (J_2)_{xyz} = -\sqrt{5}(\overline{C}_{20})_{xyz} \quad (31)$$

已知在主惯性轴坐标系 ABC 中, $K_{22} = 0$, 那么根据(2e), 此时必有 $\lambda = 0$ 。于是, 由式(2d)得出

$$J_{22} = -\frac{1}{12Ma^2} \iiint p_{22}(\sin \phi) dM \quad (32)$$

式中, ϕ 为 dM 相对主惯性轴坐标系赤道面的纬度。注意到式(2d)和(2e), 并认为坐标系 xyz 与坐标系 ABC 的赤道面之间的夹角很小, 便有

$$(J_{22})_{ABC} = -\sqrt{(J_{22}^2)_{xyz} + (k_{22}^2)_{xyz}} - \sqrt{\frac{5}{12} \sqrt{(\overline{C}_{22}^2)_{xyz} + (\overline{S}_{22}^2)_{xyz}}} \quad (33)$$

3 地球主惯性轴方向的确定

地球主惯性轴方向由主惯性轴对 x^-, y^-, z 轴的方向余弦定义。上节提到, 将对称阵 H 的二次型 $\underline{r}^T H \underline{r}$ 化为对角阵 H 的二次型 $\underline{r}^T H \underline{r}$, 实际上是用正交矩阵 Q 对变量 \underline{r} 施行线性变换 $\underline{r} = Q \underline{r}$ 。这里 Q 矩阵的列向量 q_1, q_2, q_3 , 是 H 的三个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的其欧氏长度为 1 的特征向量。这样的特征向量不是别的, 正是主惯性轴 A, B, C 对 x^-, y^-, z 轴的方向余弦向量, 即

$$\begin{aligned} Q_{e_A} &= q_1 = (\cos(A, x) \quad \cos(A, y) \quad \cos(A, z))^T \\ Q_{e_B} &= q_2 = (\cos(B, x) \quad \cos(B, y) \quad \cos(B, z))^T \\ Q_{e_C} &= q_3 = (\cos(C, x) \quad \cos(C, y) \quad \cos(C, z))^T \end{aligned} \quad (34)$$

式中, e_A, e_B, e_C , 分别代表沿主轴 A, B, C 的单位向量。因此, 求定主轴的方向余弦, 即是求定 H 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的其模为 1 的特征向量。下面给出方向余弦的另一种求定方法。

将式(15)改写为

$$V_2 = \frac{\sqrt{15} GM a^2}{2 r^3} \underline{L}^T H \underline{L} \quad (35)$$

式中

$$\underline{L} = \frac{\underline{r}}{r} = (l \quad m \quad n)^T \quad (36)$$

为向量 \underline{r} 对 x^-, y^-, z 轴的方向余弦向量。二次曲面 $\underline{r}^T H \underline{r}$ (代表惯量椭球) 具有惯性矩在其主轴方向取极值的性质, 故有

$$\frac{\partial}{\partial \underline{L}} \underline{L}^T (\lambda E - H) \underline{L} = 2 \underline{L}^T (\lambda E - H) = 0$$

或

$$(\lambda E - H) \underline{L} = 0 \quad (37)$$

因此, 主轴的方向余弦满足以下方程:

$$\begin{cases} \left[\lambda - \overline{C}_{22} + \frac{\overline{C}_{20}}{\sqrt{3}} \right] l - \overline{S}_{22} m - \overline{C}_{21} n = 0 \\ -\overline{S}_{22} l + \left[\lambda + \overline{C}_{22} + \frac{\overline{C}_{20}}{\sqrt{3}} \right] m - \overline{S}_{21} n = 0 \\ -\overline{C}_{21} l - \overline{S}_{21} m + \left[\lambda - 2 \frac{\overline{C}_{20}}{\sqrt{3}} \right] n = 0 \end{cases} \quad (38)$$

矩阵 H 的秩等于 2, 所以(38)只有两个方程独立, 将其中任两个方程与条件

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (39)$$

联解, 即可得到 l, m, n 的解。例如, 联立(38)的后两方程与式(39)即得

$$\begin{aligned} n &= \left[1 + u^2 + \left(\frac{\overline{S}_{21} u - \lambda + 2 \overline{C}_{20} / \sqrt{3}}{\overline{C}_{21}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ m &= un \end{aligned} \quad (40)$$

$$l = \left[\lambda - \frac{2 \overline{C}_{20}}{\sqrt{3}} - \overline{S}_{21} u \right] \frac{n}{\overline{C}_{21}}$$

其中

$$u = \frac{\overline{C}_{21} \overline{S}_{21} + \overline{S}_{22} \left[\lambda - 2 \frac{\overline{C}_{20}}{\sqrt{3}} \right]}{\overline{S}_{21} \overline{S}_{22} + \overline{C}_{21} \left[\lambda + \overline{C}_{22} + \frac{\overline{C}_{20}}{\sqrt{3}} \right]} \quad (41)$$

一经得到方向余弦 l, m, n , 便可得到主轴与 x^-, y^-, z 轴的夹角。用 i 代表 A, B, C 任一主轴, 记主轴 i 对 x^-, y^-, z 轴的方向余弦为 l_i, m_i, n_i , 则主轴 i 与 x^-, y^-, z 轴的夹角为

$$\begin{aligned} \langle i, x \rangle &= \arccos l_i \\ \langle i, y \rangle &= \arccos m_i \\ \langle i, z \rangle &= \arccos n_i \end{aligned} \quad (42)$$

记主轴 i 的纬度和经度为 φ_i 和 λ_i , 则有

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \arctan \left\{ \frac{m_i}{l_i} \right\} \\ \lambda_i &= \arcsin \left\{ \frac{m_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \right\} \\ \varphi_i &= \arctan \left\{ \frac{n_i}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2}} \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

对于主轴 A 的经度, 亦可以由下式给出^[9]

$$\tan 2\lambda_A = \frac{K_{22}}{J_{22}} = \frac{\overline{S}_{22}}{\overline{C}_{22}} \quad (44)$$

在主惯性轴坐标系, A 轴的经度为 0。所以, 根据(2d)和(2e), 在非主惯性轴坐标系, A 轴的经度应遵从此关系。

4 数值结果

本节旨在利用本文的算法和公式计算历元 2000.0 时的地球主惯性矩。

起始数据:

赤道半径 a (EGM96 = 6 378 136.3 m^[4])

地心引力常数 GM (EGM96 = (398 600 441.5 ± 0.8 × 10⁶ m³s⁻²)^[4,6])

引力常数 $G = (6.674 2 ± 0.001 0 × 10⁻¹¹ m³kg⁻¹s⁻²)^[8]$

动力椭率

$H = 0.003 273 763 447 ± 0.000 000 003 2$,

$H = (-7.864 ± 0.270 × 10⁻¹¹ a⁻¹),$

历元 = 1997.0^[5]

EGM96 2 阶位系数及其时间变率见表 1^[3,4]。

表 1 EGM96 2 阶位系数及其时间变率

Tab. 1 Second-degree harmonic coefficients and their temporal variations for the EGM96

完全正规化系数	系数值 × 10 ⁻⁶	不确定度 × 10 ⁻¹¹	时间变率 × 10 ⁻¹¹ a ⁻¹
\overline{C}_{20}	- 484.165 371 736	3.561 063 5	1.162 755 34
\overline{C}_{21}	- 0.000 186 987 635 955		- 0.32
\overline{S}_{21}	0.001 195 280 120 31		1.62
\overline{C}_{22}	2.439 143 523 98	5.373 915 4	- 0.494 731 439
\overline{S}_{22}	- 1.400 166 836 54	5.435 326 9	- 0.203 385 232

计算过程:

忽略时间变率的误差, 历元 2000.0 时的完全

正规化系数为

$$\overline{C}_{20} = -484.165 208 950 × 10⁻⁶ ± 3.561 063 5 × 10⁻¹¹$$

$$\overline{C}_{21} = -2.317 876 359 55 × 10⁻¹⁰$$

$$\overline{S}_{21} = 1.422 080 120 31 × 10⁻⁹$$

$$\overline{C}_{22} = 2.439 074 261 58 × 10⁻⁶ ± 5.373 915 4 × 10⁻¹¹$$

$$\overline{S}_{22} = -1.400 195 310 47 × 10⁻⁶ ± 5.435 326 9 × 10⁻¹¹$$

这些位系数参考于地固参考框架 JGM-2(接近 ITRF94)^[4]。按式(22)得到参考于主惯性轴坐标系的完全正规化位系数值:

$$\overline{A}_{20} = -484.165 208 952 × 10⁻⁶ ± 3.561 063 5 × 10⁻¹¹$$

$$\overline{A}_{22} = 2.812 406 470 68 × 10⁻⁶ ± 5.389 202 6 × 10⁻¹¹$$

相应的非正规化系数值为

$$J_2 = 1.082 626 319 56 × 10⁻³ ± 7.962 780 1 × 10⁻¹¹$$

$$J_{22} = -1.815 400 570 62 × 10⁻⁶ ± 3.478 715 3 × 10⁻¹¹$$

根据这两个位系数导出

$$\frac{C-A}{Ma^2} = (1 086.257 12 ± 0.000 11) × 10⁻⁶$$

$$\frac{C-B}{Ma^2} = (1 078.995 52 ± 0.000 11) × 10⁻⁶$$

$$\frac{B-A}{Ma^2} = (7.261 60 ± 0.000 14) × 10⁻⁶$$

利用 H (历元 2000.0) = 0.003 273 763 211 ± 0.000 000 003 2, 进一步得到:

$$\frac{A}{Ma^2} = 0.329 611 55 ± 0.000 000 32$$

$$\frac{B}{Ma^2} = 0.329 618 81 ± 0.000 000 32$$

$$\frac{C}{Ma^2} = 0.330 697 81 ± 0.000 000 32$$

利用所给 GM 和 G 值得到

$$M = (5.972 3 ± 0.000 9) × 10²⁴ kg$$

$$Ma^2 = (2.429 6 ± 0.000 4) × 10³⁸ kg m²$$

最后得到地球的主惯性矩(历元 2000.0):

$$A = (8.008 1 ± 0.001 2) × 10³⁷ kg m²$$

$$B = (8.008 3 ± 0.001 2) × 10³⁷ kg m²$$

$$C = (8.034 5 ± 0.001 2) × 10³⁷ kg m²$$

$$\frac{C-B}{A} = (3 273.536 7 ± 0.490 5) × 10⁻⁶$$

$$\frac{C-A}{B} = (3 295.494 9 ± 0.493 8) × 10⁻⁶$$

$$\frac{B-A}{A} = (21.958 4 ± 0.0033) × 10⁻⁶$$

表 2 列出了主惯性轴 A, B, C 分别与 JGM-2 框架的 x^-, y^-, z 轴的夹角及其纬度、经度值 (历元 2000. 0)。图 1 示出主惯性轴相对 JGM-2 框架的定向示意图。值得指出, 主惯性轴 C 代表地球的形状轴, JGM-2 框架 z 轴与地球形状轴之间的夹角为 $0.36''$ (见表 2)。

为了比较, 下面列出其他研究者的主惯性矩值。

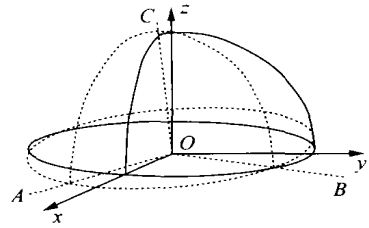


图 1 主惯性轴相对坐标系 xyz 的定向

Fig. 1 Orientations of the principal axes with respect to the coordinate system xyz

表 2 主惯性轴 A, B, C 与 z, y, z 轴的夹角以及主惯性轴 A, B, C 的纬度、经度 (历元 2000. 0)

Tab. 2 Angles between the principal axes A, B, C and x^-, y^-, z axis and latitudes and longitudes of principal axes A, B, C (epoch 2000. 0)

主轴 i	角度 $\langle i, x \rangle$	角度 $\langle i, y \rangle$	角度 $\langle i, z \rangle$	纬度 φ_i	经度 λ
A	14. 929 385	104. 929 385	90. 000 040	- 0. 000 040	345. 070 615
B	75. 070 615	14. 929 385	89. 999 910	0. 000 090	75. 070 615
C	89. 999 984	90. 000 097	0. 000 099	89. 999 901	279. 114 034

Groten^[6]:

$$A = (8. 010 1 \pm 0. 000 2 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$$

$$B = (8. 010 3 \pm 0. 000 2 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$$

$$C = (8. 036 5 \pm 0. 000 2 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$$

Bursa^[9]:

$$A = (8. 010 \pm 0. 008 \times 10^{37} \text{ kg m}^2 \approx B$$

$$C = (8. 036 \pm 0. 008 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$$

WGS84^[7]:

$$A = 8. 009 102 9 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$$

$$B = 8. 009 255 9 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$$

$$C = 8. 035 487 2 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$$

值得指出, 当前 2 阶位系数的不确定度小于 1×10^{-10} , 并不是主惯性矩精度的限制因素。主惯性矩精度主要受制于地球质量的不确定度^[9], 而地球质量的不确定度又主要是由牛顿引力常数 G 的不确定度所致, 所以归根结底 G 值的不确定度是主惯性矩精度的限制因素。采用的 G 值 ($6. 674 2 \pm 0. 001 0 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 系 2002 CODATA (Committee on Data for Science and Technology 推荐值, 是当前可利用的最精确值, 因而相信得到主惯性矩值是比较可靠的。WGS84 采用的 G 值 ($6. 673 \pm 0. 010 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ^[7, 10], 是 1998 CODATA 推荐值, 据此计算的主惯性矩的精度, 按估算约为 $0. 01 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$, 所以 WGS84 给出的惯性矩值实际上只精确到 3 位有效数字。Groten 采用 $G = (6. 672. 59 \pm 0. 30 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ^[6], 与

1986 CODATA 推荐值 ($6. 672. 59 \pm 0. 000 85 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 仅在不不确定度有别。此值与 1986 年之后新的可靠实验结果显著不符, 所以才有 1998 和 2002 年两次调整^[11, 12]。既然 1986 CODATA 推荐值实际上并不太可靠, 那么基于它计算的惯性矩值的精度要大打折扣。

为完整起见, 最后给出三轴地球椭球的扁率在 C, A 平面的极扁率: $f_p = 1: 297. 611 868$; 在 C, B 平面的极扁率: $f_p' = 1: 298. 579 776$; 在 A, B 平面的赤道扁率: $f_e = 1: 918 07. 1$

参考文献:

- [1] HEISKANEN W A, MORITZ H P. Geodesy [M]. San Francisco, California and London, UK: W H Freeman and Company, 1967.
- [2] MORITZ H, MUELLER H I. Earth Rotation/ Theory and Observation [M]. Ungar/ New York: The Ungar Publishing Company, 1987.
- [3] MARCHENKO A N, ABRIKOSOV O A. Evolution of the Earth's Principal Axes and Moments of Inertia: the Canonical Form of Solution [J]. Journal of Geodesy, 2001, 74: 655-669.
- [4] LEMOINE F G, KENYON S C, et al. The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA Geopotential Model EGM96 [R]. Maryland: Goddard Space Flight Center, 1998.

- [5] Preliminary Solution for Some Mechanical and Geometrical Parameters of the Earth [EB/OL]. <http://people.polyet.lviv.ua/sc5/sc5/results/constants/constants.htm>.
- [6] GROTEN E. Parameters of Common Relevance of Astronomy, Geodesy, and Geodynamics[J]. *Journal of Geodesy*, 2000, 74, 134-140.
- [7] NIMA. World Geodetic System 1984, Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems[R]. National Imagery and Mapping Agency Technical Report, NIMA TR8350. 2, Third Edition Amendment 1, 3 January 2000.
- [8] CODATA Value: Newtonian constant of gravitation, The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty[EB/OL]. <http://physics.nist.gov/>.
- [9] BURSA M. Lunar Solar Precession Constant and Accuracy of the Earth's Principal Moments of Inertia[J]. *Studia Geoph. Et geod.* 1982, 26.
- [10] MCCATHY D D, PETIT G. IERS Conventions (2003 [R]. IERS Technical Notes 32, 2003.
- [11] MOHR P J, TAYLOR B N. Adjusting the Values of the Fundamental Constants, *Physics Today Online* [EB/OL]. <http://www.physicstoday.org/>, 2001-03.
- [12] SCHWARZSCHILD B. Our Knowledge of G Gets Worse, Then Better, *Physics Today Online* [EB/OL]. <http://www.physicstoday.org/>, 2000-07.

《测绘学报》参考文献书写格式

以下为《测绘学报》参考文献标准的详细说明,为方便阅读,这里用中文说明,投稿时请用英文表达,此处给出示例,以做参考。

(1 专著(M、论文集(C、学位论文(D、报告(R)的标准如下:

[序号] 主要责任者. 文献题名[文献类型标识]. 出版地: 出版者, 出版年. 起止页码(任选).

(2 期刊文章[J]的标准如下:

[序号] 主要责任者. 文献题名[J]. 刊名, 年, 卷(期): 起止页码.

(3 论文集集中的析出文献的标准如下:

[序号] 析出文献主要责任者. 析出文献题名[A]. 原文献主要责任者(任选). 原文献题名[C].

出版地: 出版者, 出版年. 析出文献起止页码.

示例:

[1] 刘国军, 陈绍业, 王凤翥. 图书馆目录[M]. 北京: 高等教育出版社, 1957. 15-18.

[2] KAYEYAMA M. Incompatible Displacement Models[A]. SPRIET J A. *Numerical and Computational Methods in Structural Mechanics*[C]. New York: Academic Press, 1973. 43-57.

[3] OU J P, YOSHIDA O, SOONG T T, *et al.* Recent Advance in Research on Application of Passive Energy Dissipation System[J]. *Earthquake Eng*, 1997, 38(3): 358-361.

说明:

(1 文献种类后[]中的文献类型标识,如专著[M]中的M,请务必查找核对后写于相应位置。

(2 请作者严格按照以上所列参考文献的格式正确书写,不得缺项(任选项除外)。

(3 作者为中文名时,如:刘国军,其标准格式为:LIU Guo-jun。作者为外文名时,应按姓前名后顺序写。姓用全称大写;名用第一个缩写字母,大写。

(4 注意英文的大小写,标点符号应严格按照示例。

(5 如果参考文献为中文文献,请在文献最后注明(in Chinese)。