第 33 卷 第 4 期
2004 年 11 月

测 绘 学 报
ACTA GEODAETICA et CARTOGRAPHICA SINICA

Vol. 33, No. 4
Nov., 2004

文章编号: 1001-1595(2004)04-0289-04 中图分类号: P207 文献标识码: A

以点位误差描述线元位置不确定性的误差带方法

蓝悦明, 陶本藻
(武汉大学 测绘学院, 湖北 武汉 430079)

End Points Accuracy Based Error Band Method for Determination of a Line Segment Position Uncertainty

LAN Yue-ming, TAO Ben-zao
(*School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan* 430079, *China*)

Abstract: An end points accuracy based error band method for determination of line segments position uncertainty is proposed. This method provides a uniform formula to different situations.

Key words: end points accuracy; line segments; error band

摘 要: 从实用的角度出发, 提出按两端点的点位误差描述线元误差带的方法。主要内容包括对各种情况加以解释并给出各种不同情形的统一公式。

关键词: 点位误差; 线元; 误差带

1 引 言

在 GIS 中, 点、线、面是构成空间数据的基本元素。线是由点构成的, 而线又构成了面。线元不仅本身是重要的元素, 而且也经常作为一个基元参与 GIS 的叠置操作, 因此, 研究线元作为一个整体的位置不确定性度量指标是很重要的[1]。

对于线元的研究最早是由误差带的概念来描述的, 已有的研究集中在“ε-带”(Chrisman, 1982)、“E-带”(Honeycutt, 1986) 和“G-带”(Shi & Liu, 2000)。这些研究大大推进了人们对 GIS 不确定性的认识, 但仍有一些不足, 例如, “ε-带”和“E-带”是假设线元端点的坐标误差是相互独立的。随着人们认识和研究的深入, 发现空间数据点之间的误差不一定是相互独立的, 甚至点的误差分布某些情况下不是正态的, 而是呈 P-范分布的[2,3]。此外, 现有的线元研究是基于误差椭圆建立的[4,5], 而实际使用以点位误差更方便。本文试图在更有利于使用的情况下, 讨论如何进一步认识线元误差带的形状。

2 线元的误差模型

2.1 现有的误差带类型

最具有代表性的误差带是“ε-带”和“E-带”。“ε-带”的形状见图 1, 它是对线元以常数 ε 的缓冲区操作形成的条带。“ε-带”应用于描述线元的空间不确定性, 认为任意两点 1, 2 间的误差带是同精度的, 即为 ε, 且线元的真实位置将以一定的概率落入在“ε-带”中。

“E-带”实际上是“ε-带”的扩展。与“ε-带”不同的是: “E-带”假设任意两点 1, 2 间的误差不相关且两点坐标的方差相等, 其形状见图 2。

收稿日期: 2003-11-11; 修回日期: 2004-06-15
作者简介: 蓝悦明(1960-), 男, 山东青岛人, 博士, 副教授, 主要从事现代测量数据处理等方面的研究工作。

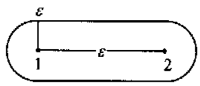

图 1 线元的 ε-带

Fig. 1 ε-band of line segments

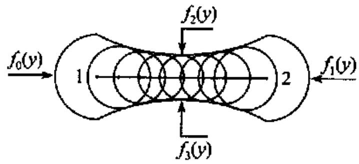

图 2 线元的 E-带

Fig. 2 E-band of line segments

“E-带”的特点是线元的误差分布呈现出“两端大、中间小”的哑铃型形状，其线元上任意一点的方差在文献[2]中已有表述，为

$$\sigma_{X_i}^2 = \sigma_{Y_i}^2 = (1 - 2r + 2r^2)\,\sigma^2 \qquad (1)$$

式中，$r = \dfrac{S_{1i}}{S_{12}}$为 i 点到 1 点的距离与 1，2 两点的距离的比值，$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ 为 1，2 两点 X，Y 坐标的方差。

“E-带”的这种哑铃型形状是经过许多的学者证明而得出的，特别是刘大杰等[2]在 1998 年详细推导了各种情况下线元不确定性的模型，这为误差带的形状问题研究打下了很好的理论基础。

史文中和刘文宝提出的“G-带”是在“E-带”的基础上进行了进一步的发展。“G-带”考虑到了任意两点 1，2 间的误差是不同精度，甚至是相关的许多情况，因此，其误差带的形状更为复杂，但其基本形状还是哑铃型(图 3 和图 4)。

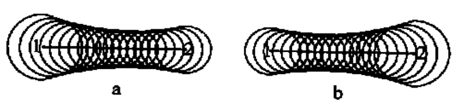

图 3 两端点不同精度的形状

Fig. 3 Figure of the line with the different error

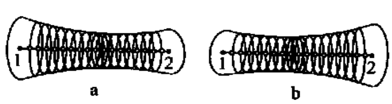

图 4 两端点不同精度且误差方向不一致的形状

Fig. 4 Figure of the line with the different error and the direction of different character

2.2 线元不确定性的模型

设任意的线元 1，2 两点间方差为

$$\boldsymbol{D}_{12} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1y_1} & \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_1y_2} \\ \sigma_{y_1x_1} & \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1y_2} & \sigma_{y_1y_2} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2y_1} & \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2y_2} \\ \sigma_{y_2x_1} & \sigma_{y_2y_1} & \sigma_{y_2x_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{bmatrix}$$

由线元 1，2 两点构成的直线上任意点 i 的坐标方差，由文献[2]中给出的公式为

$$\sigma_{X_i}^2 = (1-r)^2\sigma_{X_1}^2 + r^2\sigma_{X_2}^2 + 2r(1-r)\,\sigma_{X_1X_2} \qquad (2)$$

$$\sigma_{Y_i}^2 = (1-r)^2\sigma_{Y_1}^2 + r^2\sigma_{Y_2}^2 + 2r(1-r)\,\sigma_{Y_1Y_2} \qquad (3)$$

$$\sigma_{X_iY_i} = (1-r)^2\sigma_{X_1Y_1} + r^2\sigma_{X_2Y_2} + r(1-r)(\sigma_{X_1Y_2} + \sigma_{X_2Y_1}) \qquad (4)$$

式中，r 为距离的比值，即 $r = \dfrac{S_{1i}}{S_{12}}$，且 $0 \leqslant r \leqslant 1$。

上述方法描述线元的误差带，是以式(2)～(4)为最基本的公式。由此式出发，可求出线元上任意一处误差椭圆的长、短半轴和极值的方位，然后将这些误差椭圆族绘出，构成误差椭圆族的包络线，这样就构成了“带”。

误差带的边界线方程是由 4 个部分组成，如图 2 所示。这 4 个部分的函数式为

$f_2(y)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_r + A_r\sqrt{c_r}\cos\theta - (A_rb_r/\sqrt{c_r})\sin\theta \\ y &= y_r - A_r\sqrt{c_r}\sin\theta - (A_rb_r/\sqrt{c_r})\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5a)$$

$(0 \leqslant r \leqslant 1)$

$f_3(y)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_r - A_r\sqrt{c_r}\cos\theta + (A_rb_r/\sqrt{c_r})\sin\theta \\ y &= y_r + A_r\sqrt{c_r}\sin\theta + (A_rb_r/\sqrt{c_r})\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (5b)$$

$(0 \leqslant r \leqslant 1)$

$f_0(y)$:

$$\left.\begin{aligned} & u_1(x - x_1)^2 + 2v_1(x - x_1)(y - y_1) + \\ & \quad w_1(y - y_1)^2 = B_1^2 \\ & x = f_1(y) \leqslant x_1 + R_1(y - y_1) \end{aligned}\right\} \qquad (5c)$$

$f_1(y)$:

$$\left.\begin{aligned} & u_2(x - x_1)^2 + 2v_2(x - x_1)(y - y_1) + \\ & \quad w_2(y - y_1)^2 = B_2^2 \\ & x = f_2(y) \geqslant x_2 + R_2(y - y_2) \end{aligned}\right\} \qquad (5d)$$

式中：

$\theta = 90° - \arctan\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$，$u_r = \sin^2\varphi_r + e_r\cos^2\varphi_r$，

$v_r = (e_r - 1)\sin\varphi_r\cos\varphi_r$，$w_r = e_r\sin^2\varphi_r + \cos^2\varphi_r$，

$$e_r=\frac{B_r^2}{A_r^2},\quad a_r=\sin^2(\varphi_r+\theta)+e_r\cos^2(\varphi_r+\theta)$$

$$b_r=(e_r-1)\sin(\varphi_r+\theta)\cos(\varphi_r+\theta)$$

$$c_r=e_r\sin^2(\varphi_r+\theta)+\cos^2(\varphi_r+\theta)$$

$$R_r=(b_r\sin\theta-c_r\cos\theta)/(b_r\cos\theta+c_r\sin\theta)$$

$$r=\frac{S_{1i}}{S_{12}}(0\leqslant r\leqslant 1)$$

$$\tan 2\varphi_r=\frac{2[(1-r)^2\sigma_{X_1Y_1}+r(1-r)(\sigma_{X_1Y_2}+\sigma_{X_2Y_1})+r^2\sigma_{X_2Y_2}]}{(1-r)^2(\sigma_{X_1}^2-\sigma_{Y_1}^2)+2r(1-r)(\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2})+r^2(\sigma_{X_2}^2-\sigma_{Y_2}^2)}$$

$$\begin{aligned}A_r^2=&(1-r)^2(\sigma_{X_1}^2\cos^2\varphi_r+\sigma_{X_1Y_1}\sin 2\varphi_r+\\&\sigma_{Y_1}^2\sin^2\varphi_r)+2r(1-r)[\sigma_{X_1X_2}\cos^2\varphi_r+\\&\frac{1}{2}(\sigma_{X_1Y_2}+\sigma_{X_2Y_1})\sin 2\varphi_r+\sigma_{Y_1Y_2}\sin^2\varphi_r]+\\&r^2(\sigma_{X_2}^2\cos^2\varphi_r+\sigma_{X_2Y_2}\sin 2\varphi_r+\sigma_{Y_{21}}^2\sin^2\varphi_r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_r^2=&(1-r)^2(\sigma_{X_1}^2\sin^2\varphi_r-\sigma_{X_1Y_1}\sin 2\varphi_r+\\&\sigma_{Y_1}^2\cos^2\varphi_r)+2r(1-r)[\sigma_{X_1X_2}\sin^2\varphi_r-\\&\frac{1}{2}(\sigma_{X_1Y_2}+\sigma_{X_2Y_1})\sin 2\varphi_r+\sigma_{Y_1Y_2}\cos^2\varphi_r]+\\&r^2(\sigma_{X_2}^2\sin^2\varphi_r-\sigma_{X_2Y_2}\sin 2\varphi_r+\sigma_{Y_{21}}^2\cos^2\varphi_r)\end{aligned}$$

3 以点位误差表示的误差带

从以上讨论我们可以发现: 按误差椭圆族形成的误差带, 理论上是严密的, 能够反映出线元的误差状况, 可视化效果也很好, 但是, 其公式非常繁琐, 计算复杂, 应该加以改进, 使之既能保存原有误差带的优点, 又能使计算公式简单方便。

就一般情况而言, 线元 1, 2 两点构成的直线上任意点 i 的点位精度由式(2)、式(3)可推得为

$$\sigma_i^2=\sigma_{X_i}^2+\sigma_{Y_i}^2=(1-r)^2\sigma_1^2+r^2\sigma_2^2+2r(1-r)(\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2})\tag{6}$$

式中, $\sigma_1^2=\sigma_{X_1}^2+\sigma_{Y_1}^2$ 为端点 1 的点位精度; $\sigma_2^2=\sigma_{X_2}^2+\sigma_{Y_2}^2$ 为端点 2 的点位精度。

我们认为, 以式(6)为基础, 以 r 为参变量计算线元上各处的 σ_i, 然后构成误差带可达到以上所提出的要求。因为点位误差具有与误差椭圆相同的表示误差大小的作用, 且同一点处的点位方差 σ_i 与误差椭圆的长半轴 A_r、短半轴 B_r 有直接的关系, 即 $\sigma_i^2=A_r^2+B_r^2$。

当 $\boldsymbol{D}_{12}$ 已知时, σ_i^2 的大小就由 r 来决定了。因此, 我们可以根据各种情况来讨论误差带的形状问题。由于受到 $0\leqslant r\leqslant 1$ 限制, σ_i^2 的极值一般是位于 $r=0, 0.5, 1$ 这 3 点处。

3.1 面条型

当两端点的点位精度相同且坐标 X, Y 之间相关时, 即 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 且 $\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2}=\sigma^2$ 时, 式(6)演变为

$$\sigma_i^2=(1-r)^2\sigma_1^2+r^2\sigma_2^2+2r(1-r)(\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2})=\sigma^2\tag{7}$$

从式(7)中可以很明确的看到: 直线上任意点 i 的点位精度是相同的。显然, 这时线元误差带的形状就类似于图 1 所描述的“ε带”, 这时的带宽就是 σ。

3.2 哑铃型

当两端点的点位精度相同但坐标 X, Y 之间不相关时, 即 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 且 $\sigma_{X_1X_2}=\sigma_{Y_1Y_2}=\sigma_{X_1Y_2}=\sigma_{X_2Y_1}=0$ 时, 式(6) 演变为

$$\sigma_i^2=(1-r)^2\sigma_1^2+r^2\sigma_2^2+2r(1-r)(\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2})=(1-2r+2r^2)\sigma^2\tag{8}$$

从式(8)中可以看到: 当 σ_i^2 在两端点(即 $r=0$ 或 $r=1$)时, 有极大值 $\sigma_i^2=\sigma^2$; 在中点(即 $r=0.5$)时, 有极小值 $\sigma_i^2=0.5\sigma^2$。沿直线上各点按 σ_i^2 的值作图可以看出, 这时线元误差带的形状就类似于图 2 所描述的“E-带”。

3.3 椭圆型

当两端点的点位精度相同且坐标 X, Y 之间相关时, 即 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 且 $\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2}\neq 0$ 时, 式(6)演变为

$$\begin{aligned}\sigma_i^2=&(1-r)^2\sigma_1^2+r^2\sigma_2^2+2r(1-r)(\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2})=\\&(1-2r+2r^2)\sigma^2+(2r-2r^2)(\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2})\end{aligned}\tag{9}$$

从式(9)中可以看到: σ_i^2 在两端点(即 $r=0$ 或 $r=1$)时, 有极小值 $\sigma_i^2=\sigma^2$; 在中点(即 $r=0.5$)时, 也有极值, 但有 3 种情况:

1. 当 $\sigma^2<\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2}$ 时, $\sigma_i^2>\sigma^2$。这时沿直线上各点按 σ_i^2 的值作图可以看出, 这时线元误差带的形状就是图 5 所描述的上下略大、两端略小的近似椭圆型。

2. 当 $\sigma^2>\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2}$ 时, $\sigma_i^2<\sigma^2$。这时沿直线上各点按 σ_i^2 的值作图可以看出, 这时线元误差带的形状就类似于图 2 所描述的“E-带”。

3. 当 $\sigma^2=\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2}$ 时, $\sigma_i^2=\sigma^2$。这时沿

直线上各点按 σ_i^2 的值作图可以看出，这时线元误差带的形状就类似于图1所描述的"ε带"。

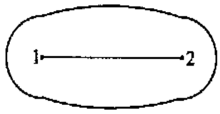

图5 两端点同精度且坐标之间相关的椭圆型形状

Fig. 5 Figure of the line with the equal error and correlative coordinates

3.4 一个实例

若一数字化地图中，线元长 $s=10$ cm，则可由文献[6]中的式(12)～(14)求出该线元的协方差函数，再按式(6)求出线元上任意点 i 处的方差–协方差，求得该线元两端的方差–协方差为：$\sigma_{X_1}^2=\sigma_{X_2}^2=0.066\ \mathrm{mm}^2$，$\sigma_{Y_1}^2=\sigma_{Y_2}^2=0.07\ \mathrm{mm}^2$，$\sigma_{X_1Y_1}=\sigma_{X_2Y_2}=-0.006\ \mathrm{mm}^2$，$\sigma_{X_1X_2}=-0.001\ \mathrm{mm}^2$，$\sigma_{Y_1Y_2}=0.008\ \mathrm{mm}^2$，$\sigma_{X_1Y_2}=\sigma_{X_2Y_1}=0.006\ \mathrm{mm}^2$。

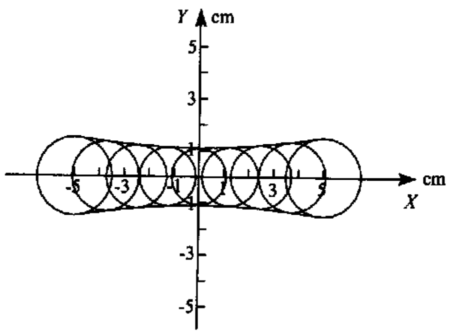

图6 两端点同精度的误差带

Fig. 6 Figure of the line with the equal error

由于 $\sigma^2=\sigma_{X_1}^2+\sigma_{Y_1}^2=\sigma_{X_2}^2+\sigma_{Y_2}^2=0.136\ \mathrm{mm}^2$，$\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2}=0.007\ \mathrm{mm}^2$，这时 $\sigma^2>\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2}^2$，由上一节中的讨论可知，此时误差带的形状为一哑铃型。绘出的误差带图形见图6。

4 结 论

按误差椭圆元素所作的误差带其最大特点是以极值的最大方向或某一特定方向的椭圆族所形成的，线元两端点无论精度是否相同两端均为椭圆形。

按点位误差所作的误差带是以点位中误差的连线为轨迹表示的。它的两端点部分均为半圆，这种误差带的绘制不受线元位置和方向的影响，从式(6)可知：σ_i 只受线元方差 $\boldsymbol{D}_{12}$ 的影响，因此没有坐标系的转换和平移所产生的复杂计算问题。

可以看出式(6)能够描述按点位误差表述的各种误差带的形式，将其作为一个统一描述误差带的公式是合适的。

不是所有的误差带形式都存在的，例如面条型，从理论上说是存在的，但要满足 $\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2}=\sigma^2$ 一般是不可能的。图5所描述的椭圆形状也是实际工作中难以达到的，因为从实际工作中可以知道：数字化点间的相关性是较小的，$\sigma^2<\sigma_{X_1X_2}+\sigma_{Y_1Y_2}$ 这个条件不可能满足[6]。

一般而言，还是哑铃型(包括图3、图4所描述的)误差带更为符合实际工作中的不确定性现象。

参考文献：

[1] LAN Yue-ming. Study of Uncertainty Theory of Spatial Positional Data[D]. Wuhan: Wuhan University, 2003. 77-85. (in Chinese)

[2] LIU Da-jie, HUA Hui. The More Discussion to the Modeling Uncertainty of Line Primitives in GIS[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1998, 27(1): 45-49. (in Chinese)

[3] LAN Yue-ming, YANG Xiao-mei. The Distribution Test of Manual Digitization Map Error[J]. Bulletin of Serveying and Mapping, 2003, 26(3): 213-216. (in Chinese)

[4] SHI Wen-zhong, LIU Wen-bao. The Stochastic Process Model for Handling Positional Uncertainty of Line Segments in GIS[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1998, 27(1): 37-44. (in Chinese)

[5] LIU Wen-bao. The Analytic Expression of Geometric Figure on Planar Line's Error Band[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1998, 27(3): 246-250. (in Chinese)

[6] LAN Yue-ming, TAO Ben-zao. Covariance Function of Place Error for Map Digitizing Data[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2004, 29(1): 63-66. (in Chinese)

[7] LAN Yue-ming, TAO Ben-zao. The Combined Quantify of Data and Model Uncertainties in Vector GIS[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2003, 28(5): 101-104. (in Chinese)