第 33 卷 第 4 期
2004 年 11 月

测 绘 学 报
ACTA GEODAETICA et CARTOGRAPHICA SINICA

Vol. 33, No. 4
Nov. , 2004

文章编号: 1001-1595(2004)04-0283-06 中图分类号: P207 文献标识码: A

测量平差中不适定问题解的统一表达与选权拟合法

欧吉坤
(中国科学院 测量与地球物理研究所 动力大地测量重点实验室, 湖北 武汉 430077)

Uniform Expression of Solutions of Ill-posed Problems in Surveying Adjustment and the Fitting Method by Selection of the Parameter Weights

OU Ji-kun
(Key Laboratory of Geodynamics, Institute of Goedesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, 430077, China)

Abstract: By analysis and comparison of several mathematical models in surveying adjustment, it could be found that their solution expressions may be unified in form. The unified formula of these solutions could be derived based on the principle of Tikhonov regularization.

Due to the inspiration of Quasi-Stable adjustment, the new idea is put forward by author of the paper to solve ill-posed problems, that is named " fitting method by selection of the parameter weights".

It is emphasized that a specific analysis of the parameters should be performed based on the specific situation when an ill-posed problem is considered to be solved. The results in accord with objective practice will be obtained by using the uniform formula of the solutions as a reasonable weight matrix or restricted condition about the unknown parameters is constructed. In the final section of the paper, two examples are introduced to illustrate the effect of the new method.

Key words: ill-posed problem; collocation; inverse problem; GPS phase-ambiguity; fitting method by selection of the parameter weights

摘 要: 将测量平差中常见的几种数学模型分析比较, 发现它们的解可以统一表达, 形式上, 都可以由吉洪诺夫正则化原理导出。在拟稳平差思想的启迪下, 作者提出选权拟合法解不适定问题的思路。作者强调, 解不适定问题应根据具体问题对参数作具体分析, 找出合理的权阵或参数约束矩阵, 利用统一的解式, 可以得到符合客观实际的结果。最后介绍两个新解法算例。

关键词: 不适定问题; 拟合推估; 反演问题; GPS 相位模糊度; 选权拟合法

收稿日期: 2004-04-14; 修回日期: 2004-06-09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40204001, 40074003), 中科院知识创新工程领域前沿资助项目(030185)
作者简介: 欧吉坤(1946-), 男, 湖南宁远人, 博士, 研究员。主要研究方向为测量误差理论, GPS 定位、定轨方法。

1 前 言

测量平差问题大多属于线性模型参数估计的范畴,实质上可以看成是反演问题,即由现象推求机理。反演中常遇到不适定问题[1],例如秩亏和病态问题,也是测量平差中需要重点解决的课题[2~3],因此可以吸取数学及其他相邻学科中有关反演研究的理论成果。事实上,以往测量平差理论发展过程中有许多成功的经验可以借鉴[2~6]。

仔细分析测量平差中常用的数学模型,可以发现它们的解可以用一个关系式统一表达。进而可以看到,它们都能在吉洪诺夫的正则化原理下导出解的表达式。

然而具体问题的解决不能生搬硬套已有的解的模式。我们的任务是在统一的基本原则下,寻求适合于具体问题的优化解法。注意到文献[7]讨论过顾及先验信息的几种平差方法的比较,这种总结是有意义的。但本文的讨论涉及到的类型和范围更广泛。

下面我们来分析测量平差中的几种数学模型和它们的解。

间接平差,这是最基本的模型[4]。设有线性观测方程

$$\underset{nm}{\overset{m}{A}}X = L + V, \text{观测权阵 } P \tag{1a}$$

其中, A 是系数阵, $n > m$, 列满秩, X 是待估参数, L 是观测值(实测值减近似计算值), V 为观测噪声。

可以直接由经典最小二乘原理求得 X 的估值

$$\hat{X} = (A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}PL \tag{1b}$$

其他线性平差模型都可看成是在间接平差模型基础上的扩展。

1.1 秩亏自由网平差[2~4]

自由网平差数学模型表示成

$$\begin{cases} \underset{nm}{\overset{r}{A}}X = L + V \qquad \text{权 } P \\ \underset{dm}{\overset{d}{G}}X = 0 \end{cases} \tag{2a}$$

由于系数阵 A 秩为 $r < m$, 秩亏数 $d = m - r$, 于是上式中附加基准条件, 其解为

$$\hat{X} = (A^{\mathrm{T}}PA + G^{\mathrm{T}}G)^{-1}A^{\mathrm{T}}PL \tag{2b}$$

有时也可考虑取对参数加权的约束条件: $GP_XX = 0$, 可用 $\overline{G} = GP_X$ 取代式(2b)中的 G 来求解。

1.2 病态问题[4,9,11]

基本模型

$$AX = L + V \tag{3a}$$

由于法方程系数阵 $N = A^{\mathrm{T}}PA$ 的条件数很大,需要采取特殊措施求解。岭估计是常用的方法,它通过岭参数 α(或阻尼因子)的作用,改善法方程的状态。岭估计可以表达成

$$\hat{X} = (A^{\mathrm{T}}PA + \alpha I)^{-1}A^{\mathrm{T}}PL \tag{3b}$$

广义岭估计

$$\hat{X}_G = (A^{\mathrm{T}}PA + GKG^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}}PL, \quad K = \mathrm{diag}(k_1, \cdots, k_m) \tag{3c}$$

1.3 拟合推估(或称配置)模型[3~6]

模型中既含有非随机量 X, 又含有随机量 S。注意到 S 既是待估量, 又是随机量取值。顾及 S 的统计特性, 解联立方程组

$$\begin{cases} \underset{nm}{\overset{m}{A}}X + \underset{nJ}{B}\underset{J1}{S} = L - n \quad \text{观测权 } P_n \\ S = S \quad \text{随机信号权 } P_s \end{cases} \tag{4a}$$

解得

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}P_nA & A^{\mathrm{T}}P_nB \\ B^{\mathrm{T}}P_nA & B^{\mathrm{T}}P_nB + P_s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} P_nL \tag{4b}$$

对于未测点信号,可通过互协方差推估。

1.4 半参数模型,又称为不完全参数化模型[8,10,15]

$$\underset{nm}{\overset{m}{A}}X + \underset{n1}{S} = L - n \tag{5a}$$

其中, X 是非随机参数, S 是非参数信号, n 是噪声。

这里信号 S 不考虑统计特性,是与拟合推估模型的区别。

半参数模型的解可表示成

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}P_nA & A^{\mathrm{T}}P_n \\ P_nA & P_n + \alpha R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix} P_nL \tag{5b}$$

其中, R 是平滑矩阵, α 是平滑参数。

1.5 卡尔曼滤波[4,11]

随着GPS在导航和动态定位中的应用,卡尔曼滤波方法受到越来越多的重视。函数模型表示成

$$\begin{cases} X_{k+1} = \Phi_{k+1,k}X_k + W_k \\ L_{k+1} = A_{k+1}X_{k+1} + V_{k+1} \end{cases} \tag{6a}$$

第一式是状态方程, 第二式是观测方程。其中, Φ 是状态转移矩阵, $\boldsymbol{W}$ 是动态噪声, $\boldsymbol{A}$ 是系数阵, $\boldsymbol{V}$ 是观测噪声。统计模型可见有关文献。

在实际应用中状态参数往往多于观测值个数, 因此观测方程系数阵大多是秩亏的。

如果记 $\bar{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{X}_{k+1}-\bar{\boldsymbol{X}}_{k+1,k}$, $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_{k+1}-\boldsymbol{A}_{k+1}\bar{\boldsymbol{X}}_{k+1,k}$, 这里 $\bar{\boldsymbol{X}}_{k+1,k}$ 是最优一步预报估计, 那么滤波解

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{A}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{A}_{k+1}+\boldsymbol{P}_{\bar{X}})^{-1}\boldsymbol{A}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{L} \tag{6b}$$

其中, $\boldsymbol{P}_{\bar{X}}=\Sigma_{k+1,k}^{-1}$, 即预报误差方差阵的逆阵。$\hat{\boldsymbol{X}}_{k+1}=\bar{\boldsymbol{X}}_{k+1,k}+\hat{\boldsymbol{X}}$。

1.6 反演问题[9]

目前许多反演问题仍可用下面的线性模型表达

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{L} \tag{7a}$$

根据观测值个数 n 和参数个数 m 的不同关系, 将模型(7a)分为超定($n>m$), 不定($n<m$)以及混定($|\boldsymbol{A}|\approx 0$)三类, 但它们的解都可表达成

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \tag{7b}$$

其中, $\boldsymbol{R}$ 和 α 分别为正则化矩阵和正则化参数。

顺便列举附有先验统计信息的参数估计模型[4,7], 基于模型 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{V}$, 如果还已知参数的协方差阵 Σ_X 或权阵 $\boldsymbol{P}_X$, 那么, 解得

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{P}_X)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PL} \tag{8}$$

如果将 $\boldsymbol{X}$ 看成已知统计特性的信号, 这时可看成不含非随机参数的拟合推估模型的特殊情形。

2 解的统一表达

分析以上列举的测量平差中采用的基本模型的解式, 可以发现, 它们可统一表达成

$$\hat{\boldsymbol{Z}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{C}+\alpha\boldsymbol{P}_Z)^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{L} \tag{9}$$

例如, 对于秩亏自由网平差, 取 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_Z=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}$, $\hat{\boldsymbol{Z}}=\hat{\boldsymbol{X}}$。

对于岭估计, 取 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_Z=\boldsymbol{I}$, (对于广义岭估计, $\alpha=1$, $\boldsymbol{P}_Z=\boldsymbol{GKG}^{\mathrm{T}}$), $\hat{\boldsymbol{Z}}=\hat{\boldsymbol{X}}$。

对于拟合推估及半参数模型, 它们也可归类为秩亏问题,

$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})$ 或 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{P}_Z=\begin{pmatrix}0 & \\ & \boldsymbol{P}_S\end{pmatrix}$ 或 $\boldsymbol{P}_Z=\begin{pmatrix}0 & \\ & \boldsymbol{R}\end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{Z}}=\hat{\boldsymbol{X}}$

其他几种模型亦可按这种形式处理。

3 正则化方法

吉洪诺夫正则化方法是针对不适定问题提出来的[1]。对于线性化模型

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{CZ} \tag{10}$$

其中, $\boldsymbol{Z}$ 是待估参数, $\boldsymbol{C}$ 是系数阵。为使式(10)有唯一稳定解, 构造准则函数

$$\boldsymbol{M}^{\alpha}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L})=\|\boldsymbol{CZ}-\boldsymbol{L}\|_{P_n}^2+\alpha\Omega(\boldsymbol{Z}) \tag{11}$$

使式(11)最小化的参数 $\boldsymbol{Z}$ 即是所要求的式(10)的解。

式(11)中 $\Omega(\boldsymbol{Z})$ 称为稳定泛函, 它的作用是将原有不适定问题转化为适定问题。α 是正则化参数(或称平滑参数), 起着平衡 $\boldsymbol{M}^{\alpha}$ 右边两项的作用。$\|\cdot\|_P^2$ 表示加权 2 范。

在实际计算中, 稳定泛函 $\Omega(\boldsymbol{Z})$ 可取不同形式[11], 例如取

$\Omega(\boldsymbol{Z})=\|\boldsymbol{GZ}\|^2=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{GZ}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{Z}$, 其中 $\boldsymbol{P}_Z=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}$

求解

$$\Phi=\|\boldsymbol{V}\|_{P_n}^2+\alpha\Omega(\boldsymbol{Z})=\|\boldsymbol{V}\|_{P_n}^2+\alpha\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{Z}=\min \tag{12}$$

令 $\partial\Phi/\partial\boldsymbol{Z}=0$, 得到

$$\hat{\boldsymbol{Z}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{C}+\alpha\boldsymbol{P}_Z)^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{L} \tag{13}$$

对照式(9), 可见目前测量平差中不适定问题(秩亏或病态)大多可基于吉洪诺夫正则化方法来求解。当然对于适定问题(如模型(1a)), 可看成它的特殊形式。

容易联想到测量平差中提到的广义最小二乘原理[4]

$$\|\boldsymbol{V}\|_{P_n}^2+\|\boldsymbol{V}_X\|_{P_X}^2=\min \tag{14}$$

当 $\alpha=1$ 时, 式(12)与式(14)在形式上是一致的。

正则化方法的核心是通过附加"全部或部分参数(或其改正数)加权平方和极小"的条件, 也即相当于增加约束, 补充(先验)信息, 来克服不适定性, 使解唯一且稳定。

根据附加的关于参数的约束不同, 或者说参数的权阵选择不同, 可以得到不同物理意义的解, 例如最小能量解, 最平滑解等等[9]。秩亏自由网平差中有不同基准下的不同解[2,4]。

4 拟稳平差思想的启迪

对于不适定问题, 附加不同约束可得到不同

意义的解，因此关键是如何选择约束条件。我国著名大地测量学家、误差理论专家周江文先生提出的拟稳平差[2~3]思想，能给我们深刻的启迪。

拟稳平差不同于其他自由网平差，强调将监测网的形变点分成"拟稳点"和"非拟稳点"，然后对相应于拟稳点的参数施加约束(改正数平方和极小)。这样的原则既有测量依据，又符合客观实际，是拟合而非强制附合，因而解算结果要优于其他自由网平差结果，拟稳平差在形变分析中已得到广泛应用。

借鉴拟稳平差的思想，粗差的拟准检定法[12~14]按一定规则将观测值分成"拟准"和"非拟准"两部分，对拟准观测的真误差附加平方和极小的约束，求解关于真误差的秩亏方程。然后根据真误差的估值的分群特性来判别粗差。由于这种求解原则有客观依据，不是强制附合，因而能将含粗差的观测值检测出来。因此，选择合理的约束条件或稳定泛函 $\Omega(\boldsymbol{Z})$ 是求解不适定问题的关键。

伪逆平差对所有参数附加平方和极小条件，致使解靠近参数的近似值，会歪曲结果；岭估计的实质也是要求所有参数的平方和(以 α 为权)极小，因而岭估计的结果依赖于参数的近似值。

5 新的研究思路

5.1 跳出以往的求解框架

目前自由网平差时，人们已重视附加基准条件的选择。然而解病态问题大多只关注如何选岭参数，效果不太好。解拟合推估问题，偏重于协方差函数的算法。因此，笔者认为更重要的是从原理上分析以往解法的不足。

5.2 选权拟合法

不适定问题的解法的关键，是要辨证地选择"稳定泛函"(约束条件)。实质是选择参数的权函数 $\boldsymbol{P}_Z$，因此我们将解法称作"选权拟合法"。

对于病态问题，如果能事先对于部分参数有较可靠的先验信息，则对这部分参数附加适当约束，可能会改善解的结果。本文提到的"先验信息"，不局限于已知的方差(协方差)阵，也可以是其他规律性认识，例如曲线的光滑度等等。例如取约束为

$$\|\boldsymbol{GZ}\|^2=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{Z_1}\boldsymbol{Z}_1$$

其中，$\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_0\\ \boldsymbol{Z}_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_Z=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \\ & \boldsymbol{P}_{Z_1}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Z}_1$ 为先验信息较可靠的那部分参数。

对于拟合推估问题，假设能通过适当的方法，对趋势性部分的参数 $\boldsymbol{X}$ 的近似值有较精确的了解，即 $\boldsymbol{X}^0$ 较可靠，那么可以对 $\boldsymbol{X}$ 附加约束，而不对随机量 $\boldsymbol{T}$ 的取值附加约束，即取

$$\boldsymbol{P}_Z=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_X & \\ & O\end{bmatrix},$$

$$\|\boldsymbol{Z}\|^2=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_X & \\ & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{T}\end{bmatrix}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_X\boldsymbol{X}$$

于是求解原则变成，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_X\boldsymbol{X}+\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_n\boldsymbol{n}=\min$，这样也可能改善解的结果。对于非测点信号，仍利用已知的协方差关系进行推估。

对于半参数模型，可对 $\boldsymbol{X}$ 或部分 $\boldsymbol{S}$ 约束，约束数不一定取 $\boldsymbol{n}$ 个，视问题性质，能满足求得唯一解即可。

以上建议的这几种形式，笔者都做过较多模拟计算，结果均比以往方法要好。本文在算例部分给出其中的两个算例。

5.3 适当选择平滑参数

在稳定泛函 $\Omega(\boldsymbol{Z})$ 一项的基础上，添加平滑参数 α，可起到平衡泛函 $\boldsymbol{M}^{\alpha}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{L})$ 中的两项，即 $\|\boldsymbol{V}\|_{P_n}^2$ 和 $\Omega(\boldsymbol{Z})$ 之间的关系的作用。

选择适当的 α 需要利用最优化算法，例如遗传算法、或"L 曲线法"[10]、广义交叉核实法[8]等办法。另外顾及 α 的效果如何，还需要深入研究。

6 算 例

为了说明选权拟合法在解测量平差不适定问题时的效果，下面介绍半参数模型和 GPS 快速定位中模糊度解算的两个例子。限于篇幅，有的具体细节从略，只说明结果。

6.1 半参数模型

模拟算例(取自文献[15]，做了一些改造)

模拟真值 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{AX}$，$\boldsymbol{A}$ 为 100×2 阶系数阵，$A_{i1}=i/20$，$A_{i2}=(i/20)^2$，$i=1,2,\cdots,100$，系统误差 $\boldsymbol{S}=(S_i)$，$S_i=10\sin(t_i)$，$t_i=2(i-1)\pi/100$，$i=1,2,\cdots,100$，观测误差 $\Delta_i\sim N(0,1)$，观测值 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{S}+\Delta=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{S}+\Delta$

按三种方法计算，¹ 经典 LS 解；④ 半参数模型解；㈣ 选权拟合解，然后进行对比分析。取 100 个观测中的前 90 个作拟合区，后 10 个作为

预报区, 计算结果见图 1 和图 2。

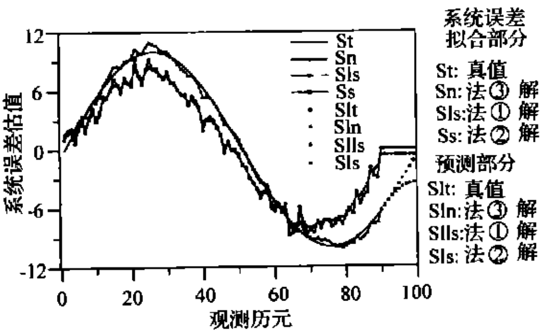

图 1　系统误差的拟合与预测

Fig. 1　The values of fitting and prediction of the system errors

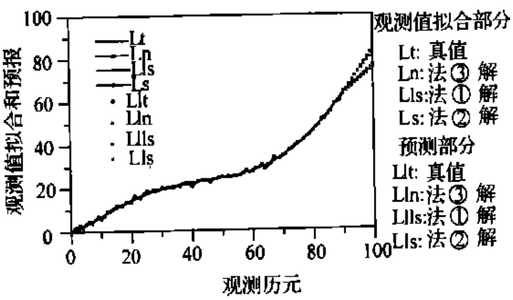

图 2　观测值的拟合与预测

Fig. 2　The values of fitting and prediction of the observations

从图 1 看到, 对系统误差 $\boldsymbol{S}$ 的拟合, 选权拟合法的结果更接近真值。

由于在 90 个观测拟合区, 附加约束 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}$ 不满足最小的条件, 半参数解法出现大的偏差, 与经典 LS 解的结果相近, 偏离真值较多。在预报区, 新解法也好于另两种方法。

从图 2 看到, 观测值的平差值 3 种解法在拟合区大致相近, 在预报区, 选权拟合法结果好于其他两种。(限于篇幅, 选权拟合法的实施过程将在另文介绍。)

可以得出结论: 附加约束条件应尽可能符合实际, 这样的解才更准确。

6.2　快速解算相位模糊度算例(典型病态问题)[16]

基线长 3 220.340 m, 2003 年 2 月 18 日上午 10:00~11:00 用 Javad GPS 接收机观测 6 颗星, 采样率为 1 s, 截止高度角为 15°, 随机取 5 个历元 L_1 单频数据形成双差, 用两种方案计算模糊度。

方案 1: 选权拟合法(对坐标分量取适当权约束[16])

方案 2: LS+ LAMBDA 方法

计算结果见表 1。

结果表明, 新方法适当降低了法方程条件数, 模糊度浮点解接近其准确值, 经搜索容易固定模糊度, 可提高快速定位效率。经长序列(每 5 历元一组) 计算, 成功率 100%, 说明结果是可信的。而以往方法对单频观测很难在几秒钟固定模糊度。

表 1　算例 2 两种方案结果比较

Tab. 1　The comparisons of the results between the two schemes

内容	方案 1		方案 2
法方程条件数	7.6152×10^{6}		1.7791×10^{10}
浮点解	10.1129		23.8049
	1.6194		25.0293
	20.8106		−7.9558
	−28.1316		−7.2622
	−15.6625		2.6177
$\Vert\hat{N}-N\Vert$	1.3830		47.5323
固定解	10	固定正确	不能固定
	2		
	21		
	−27		
	−15		

7　结束语

作者通过分析测量数据处理中的几种数学模型, 试图将它们的解用一个统一的表达式来概括。本文涉及的模型类型要比一般顾及先验信息的平差模型要更广泛, 内涵也更丰富。形式上它们都可由吉洪诺夫正则化原理推导出来, 解都可以用式(9) 统一表达。作者强调, 正则化方法的关键是合理选择参数约束条件, 提出了"选权拟合"的思路。新方法不同于以往的方法, 它倡导根据具体问题将参数做具体分析, 然后找出合理的权阵。这是值得深入研究的课题。初步实验, 特别是在 GPS 快速解算整周模糊度的实践中[16,17], 证明选权拟合法效果较好。

注: 感谢王振杰博士提供算例计算。

参考文献:

[1]　TIKHONOV A N, ARSENIN V Y. Solutions of Ill-

posed Problems[M]. New York: Wiley, 1977.

[2] ZHOU Jiang-wen. Quasi-stable Adjustment of Monitoring Networks[R]. Wuhan: Institute of Geodesy and Geophysics of CAS, 1980. (in Chinese)

[3] ZHOU Jiang-wen. On the Rule of Fitting[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1999, 28(3). (in Chinese)

[4] CUI Xi-zhang, YU Zong-chou, *et al*. General Adjustment of Surveying[M]. Wuhan: Press of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 2001. (in Chinese)

[5] MORITZ, H. Advanced Physical Geodesy[M]. Karlsruhe: Press Tunbridge Wells Kent, 1980. 238-259.

[6] ZHOU Jiang-wen. Further on Collocation[R]. Wuhan: Institute of Geodesy and Geophysics of CAS, 2001. (in Chinese)

[7] SUI Li-fen, TAO Da-xin. Various Adjustment Methods of Unknown Parameters with Prior Information and Comparison with Each Other[J]. Engineering of Surveying and Mapping. 2001, 10(4): 9-12. (in Chinese)

[8] GREEN P J, SILVERMAN B W. Nonparametric Regression and Generalized Linear Models: A Roughness Penalty Approach[M]. [s. l.]: Chapman · Hall, 1994.

[9] YANG Wen-cai. Theory and Methods of Geophysical Inversion[M]. Beijing: Press of Geology, 1997. (in Chinese)

[10] FISCHER B, HEGLAND M. Collocation, Filtering and Nonparametric Regression[J]. ZfV, 1999, (1): 17-24. 1999, (2): 46-52.

[11] WANG Hong-yu. Random Digital Signal Processing [M]. Beijing: Science Press, 1988. (in Chinese)

[12] OU Ji-kun. Quasi-accurate Detection of Gross Errors (QUAD)[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1999, 28(1): 15-20. (in Chinese)

[13] OU Ji-kun. Further on the Principle, Implementation and Application of Quasi-accurate Detection Method[J]. Engineering of Surveying and Mapping. 2002, 11(4): 3-6. (in Chinese)

[14] CHAI Yan-ju. Theory, Application and Design of Quasi-accurate Detection Method[D]. Wuhan: Institute of Geodesy and Geophysics of CAS, 2002. (in Chinese)

[15] SUN Hai-yan, WU Yun. Semiparametric Regression and Model Refining[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University. 2002, 27(2): 172-174. (in Chinese)

[16] OU Ji-kun, WANG Zhen-jie. An Improved Regularization Method to Resolve Integer Ambiguity in Rapid Positioning Using Single Frequency GPS Receivers[J]. Chinese Science Bulletin, 2004, 49(2): 196-200. (in Chinese)

[17] OU Ji-kun, CHAI Yan-ju, YUAN Yun-bin. Adaptive Filtering for Kinematic Positioning by Selection of the Parameter Weight[A]. Advance of Geodesy and Geodynamics[C]. Wuhan: Hubei Press of Science and Technology. 2004. (in Chinese)