

中图法分类号: TP391 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)11-1983-06

论文索引信息: 李财莲, 孙即祥, 康耀红. 自适应去噪函数性能研究 [J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(11): 1983-1988

# 自适应去噪函数性能研究

李财莲<sup>1)</sup>, 孙即祥<sup>1)</sup>, 康耀红<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> (国防科学技术大学电子科学与工程学院, 长沙 410073) <sup>2)</sup> (海南大学信息科学技术学院, 海口 570228)

**摘要:** 提出一种新自适应去噪函数。与经典的硬阈值函数与软阈值函数相比, 此函数具有明显优点。首先, 此函数表达式简单易于计算, 连续并有无穷阶导数, 便于进行各种数学处理; 其次, 本文证明了新函数具有收敛性、连续可导性及自适应性, 为信号的自适应去噪提供了新的方法。仿真结果表明新函数不仅能有效去除噪声, 而且比两种经典的阈值函数有更高的信噪比和更好的视觉效果, 去噪后图像相对硬阈值函数去噪图像较光滑, 相对软阈值函数去噪图像则更多地保留了图像边缘等局部特征, 同时其均方误差最小, 优于经典的两种阈值函数。

**关键词:** 小波变换; 硬阈值函数; 软阈值函数; 新去噪函数; 最小均方误差; 图像去噪

## Research on a new function for image adaptive denoising

Li Cailian<sup>1)</sup>, Sun Jixiang<sup>1)</sup>, Kang Yaohong<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> (College of Electrical Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073 China)

<sup>2)</sup> (Information Science Technology College, Hainan University, Haikou 570228 China)

**Abstract:** In this paper we introduce a new function for image denoising. The new function is simple and continuous. It obtains some advantages from both: the hard-thresholding function and the soft-thresholding function. It overcomes the shortcoming that there is an invariable dispersion between the estimated wavelet coefficients and decomposed wavelet coefficients of the soft-thresholding method. At the same time, this function overcomes the shortcoming of the hard-thresholding method with discontinuous functions. We proof that the new function satisfies the shrinkage condition and has infinite rank continuous derivative. At the same time, it has adaptive character and is suitable for various mathematical processing. These advantages make it possible to construct an adaptive algorithm for image denoising. At last, several numerical experiments show that the proposed new function is very effective and predominant. It gives better performance both in terms of PSNR and in visual quality. Our function can preserve more significant information of original images like edges and details than the soft-thresholding function. At the same time, the images denoised by our function are smoother than those denoised by the hard-thresholding function. It also gives a better MSE performance than two typical methods.

**Keywords:** wavelet transform; hard-thresholding function; soft-thresholding function; new denoising function; MSE estimate; image denoising

## 0 引言

小波阈值去噪算法是一种实现简单且效果较好的非线性去噪方法, 它的优点是噪声可以得到很好的

抑制, 且反映原始特征的尖峰点得到很好的保留。最早的阈值去噪方法是 Donoho 提出的 VisuShrink 方法<sup>[1]</sup>, 这种阈值方法又称为通用阈值去噪法, 由于此方法在 Besov 空间上可得到最佳估计值, 因此阈值去噪方法引起了国内外很多学者的注意。在国内, 很多

收稿日期: 2010-06-13; 修回日期: 2010-11-26

第一作者简介: 李财莲 (1973—) 女, 工程师, 国防科学技术大学电子科学与技术专业博士研究生, 研究方向为计算机视觉与智能信息处理。E-mail: lc1198@163.com.

学者都对阈值函数进行了研究和应用,并分别提出了新的阈值函数<sup>[2-7]</sup>,但由于他们所采用的新阈值函数都是分段函数,都只是对硬阈值函数或软阈值函数进行了改进,表达式复杂,无法求导,在具体应用中不便于进行运算处理。曲天书<sup>[8]</sup>等人提出了一种新的阈值函数,其功能类似于软阈值函数,连续可微,易于求导,实现了图像的自适应去噪。但由于其功能类似于软阈值函数,具有小波系数与原有系数之间有固定偏差的缺点,并且不能很好地保持图像边缘等局部特征,限制了它的进一步应用。本文提出了一种新的去噪函数,它兼顾了硬阈值函数与软阈值函数的功能,并且连续有无穷阶导数,便于进行各种数学处理,为图像去噪的自适应处理提供了可能。

# 1 基本原理

## 1.1 基本定义

假设噪声图像  $Y = (y_n)_{n \in [1, N]}$  为真实图像  $X = (x_n)_{n \in [1, N]}$  的观测值,即

$$Y = X + \sigma b \tag{1}$$

式中,  $\sigma > 0$  为已知的噪声方差,  $b = (b_n)_{n \in [1, N]}$  为独立同分布(iid)的高斯白噪声  $b \sim N(0, 1)$  且满足  $|b_n| \leq 1, \forall n \in [1, N]$ 。

图像降噪的目的是根据观测值  $Y$  找到图像  $X$  的估计值  $\hat{X}$  使得均方误差 MSE 最小,用均值取代数学期望可得

$$\varepsilon = \text{MSE}(\hat{X}, X) = E \|\hat{X} - X\|^2 \tag{2}$$

我们期望式(2)最小,且满足收敛条件

$$|Y| - \sigma \leq |\hat{X}| \leq |Y| \tag{3}$$

## 1.2 新去噪函数

目前获得广泛应用的硬阈值函数表达式为

$$\eta_t(y) = \begin{cases} 0 & |y| < t \\ y & \text{其他} \end{cases} \tag{4}$$

式中,  $t$  为选定的阈值,硬阈值函数去噪可以很好地保留图像边缘等局部特征,但因硬阈值函数不连续,去噪后图像会出现振铃、伪吉布斯效应等视觉失真。

Donoho 提出的软阈值函数表达式如下:

$$\eta_t(y) = \text{sgn}(y) (|y| - t)_+ \tag{5}$$

式中,  $(x)_+ = \max(x, 0)$ 。软阈值函数虽连续但导数不连续,去噪后系数与原系数存在一个恒定的偏差,相对硬阈值处理要平滑,但可能会造成边缘模糊等失真现象,不能很好地保持图像边缘等局部信息。

在实际应用中,我们经常需要连续的一阶导数甚至高阶导数进行运算处理,因此软阈值函数的应用具有一定的局限性。

Bruce 分析了软、硬阈值去噪方法在 Gaussian 噪声条件下的性能,得到以下结论<sup>[9]</sup>:

- 1) 给定阈值,软阈值总比硬阈值方法造成的方差小;
- 2) 当系数充分大时,软阈值比硬阈值方差造成的偏差大;
- 3) 当系数在阈值附近时,硬阈值方法有较大的方差及偏差。

本文在文献[8]的基础上,构造了一个新的去噪函数,表达式如下:

$$\eta_t(y) = y \times \frac{1 - e^{-(y/t)^2}}{1 + e^{-(y/t)^2}} \tag{6}$$

考察函数,对于选定的阈值  $t$ ,有

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{\eta_t(y)}{y} = \lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-(y/t)^2}}{1 + e^{-(y/t)^2}} = 1 \tag{7}$$

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{\eta_t(y)}{y} = \lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-(y/t)^2}}{1 + e^{-(y/t)^2}} = 0 \tag{8}$$

由式(7)(8)可知,当  $|y| \rightarrow \infty$  时,新函数趋向于硬阈值函数,而当  $|y| \rightarrow 0$  时,新阈值函数趋向于 0 值。图 1 为上述 3 种函数的图形表达,实线表示硬阈值函数,虚线表示软阈值函数,点画线表示本文新去噪函数。由图 1 可以看出,当系数非常大时,新阈值函数趋近于硬阈值函数,因此能保留图像的边缘和纹理等特征;当系数比较小时,接近于软阈值函数,趋近于 0 但不等于 0,因此图像保持了软阈值函数的平滑性,比硬阈值函数光滑。图 2 为本文新去噪函数对应不同  $t$  值时的图形表达,由图 2 可以看出,新阈值函数是连续的,具有收敛性,连续可导性。

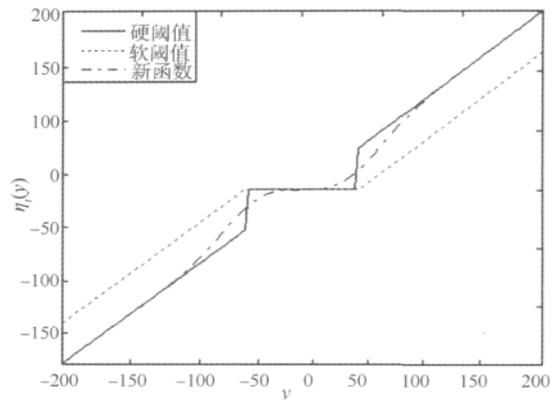


图 1 3 种去噪函数对比

Fig. 1 Three thresholding function

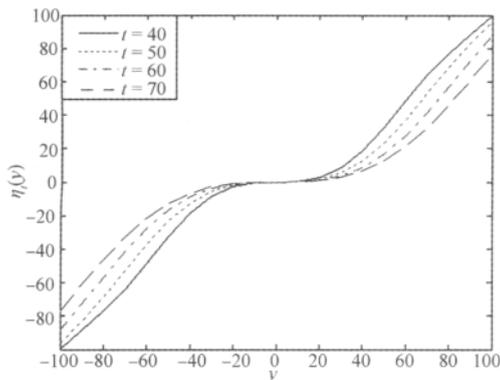


图 2 不同  $t$  值时新去噪函数

Fig. 2 New thresholding function according to different  $t$

1.2.1 收敛性

置阈值  $t = \sigma$  定义

$$\hat{X}^{(\sigma)}(y_n) = \eta_\sigma(y_n) \quad \forall n \in [1, N] \quad (9)$$

定理 1 新的去噪函数式(6) 满足收敛条件

$$|Y| - \sigma \leq |\hat{X}^{(\sigma)}| \leq |Y| \quad (10)$$

证明: 令  $u = e^{-(\frac{y}{\sigma})^2}$ , 易证  $0 < u < 1$ , 则  $0 <$

$\frac{1-u}{1+u} < 1$ , 由式(9) 可得

$$|\hat{X}^{(\sigma)}| = |\eta_\sigma| = \left| Y \times \frac{1-u}{1+u} \right| \leq |Y| \quad (11)$$

又

$$|\hat{X}^{(\sigma)}| = |\eta_\sigma| = \left| Y \times \frac{1-u}{1+u} \right| = \left| Y - \frac{2u}{1+u} Y \right| \quad (12)$$

由  $0 < u < 1$  得  $0 < \frac{2u}{1+u} < 1$ , 则  $|Y| > \left| \frac{2u}{1+u} Y \right|$ ,

即  $|Y| - \frac{2u}{1+u} |Y| > 0$ , 由此可知

$$|\hat{X}^{(\sigma)}| = \left| Y - \frac{2u}{1+u} Y \right| = |Y| - \left| \frac{2u}{1+u} Y \right| \quad (13)$$

$$\text{当 } |Y| < \sigma \text{ 时, } \left| \frac{2u}{1+u} Y \right| < \left| \frac{2u}{1+u} \sigma \right| < \sigma \quad (14)$$

当  $|Y| \geq \sigma$  时,  $|2uY| \geq 2u\sigma > u\sigma + \sigma$  即

$$\left| \frac{2u}{1+u} Y \right| < \sigma \quad (15)$$

将式(14) (15) 代入式(13) 可得

$$|\hat{X}^{(\sigma)}| = |Y| - \left| \frac{2u}{1+u} Y \right| \geq |Y| - \sigma \quad (16)$$

由式(11) (16) 可得,  $|Y| - \sigma \leq |\hat{X}^{(\sigma)}| \leq |Y|$ , 证毕。

由式(1) 可知,  $|Y| \geq |X|$  且  $|X| = |Y - \sigma| \geq$

$|Y| - \sigma$ , 因此

$$|Y| - \sigma \leq |X| \leq |Y| \quad (17)$$

由式(10) (17) 可知,  $X$  的估计  $\hat{X}$  与  $X$  在同一个区间范围内, 本文新函数去噪时可以得到更高的 PSNR 值和更好的视觉效果。

1.2.2 连续可导性

易证新函数式(6) 是连续的, 其一阶导数为

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{4y^3 e^{-(\frac{y}{t})^2}}{t^3 (1 + e^{-(\frac{y}{t})^2})^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1 - e^{-(\frac{y}{t})^2}}{1 + e^{-(\frac{y}{t})^2}} + \frac{4y^2 e^{-(\frac{y}{t})^2}}{t^2 (1 + e^{-(\frac{y}{t})^2})^2} \quad (19)$$

二阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} = & [8y^4 e^{-(\frac{y}{t})^2} (1 - e^{-(\frac{y}{t})^2}) - \\ & 12y^2 t^2 e^{-(\frac{y}{t})^2} (1 + e^{-(\frac{y}{t})^2}) ] / \\ & t^5 (1 + e^{-(\frac{y}{t})^2})^3 \end{aligned} \quad (20)$$

依此求导, 可求得无穷阶导数。

1.2.3 自适应性

根据 SURE 无偏估计<sup>[10-11]</sup>:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \| \hat{X} - X \|^2 = \| \eta_t(y) - X \|^2 = \\ \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\eta_t^2(y_n) - 2y_n \eta_t(y_n) + 2\sigma^2 \eta_t'(y_n))}_{\varepsilon} + \\ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^2 \end{aligned} \quad (21)$$

是 MSE 的无偏估计。基于最小均方误差算法的图像降噪目的是找到一个最佳阈值  $t_{opt}$  使 MSE 最小,

$$\begin{aligned} t_{opt} = \operatorname{argmin}_t (\tilde{\varepsilon}(t)) = \\ \operatorname{argmin}_t \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\eta_t^2(y_n) - \right. \\ \left. 2y_n \eta_t(y_n) + 2\sigma^2 \eta_t'(y_n)) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

由此可得

$$\begin{aligned} \Delta t = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N (\eta_t(y_n) - \\ y_n) \frac{\partial \eta_t(y_n)}{\partial t} + \frac{2\sigma^2}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2 \eta_t(y_n)}{\partial y_n \partial t} \end{aligned} \quad (23)$$

将式(6) (18) — (20) 代入式(23) 可得

$$\begin{aligned} \Delta t = \frac{16}{N} \sum_{n=1}^N \frac{y_n^4 e^{-2(y_n/t)^2}}{t^3 (1 + e^{-(y_n/t)^2})^3} + \\ \frac{24\sigma^2}{N} \sum_{n=1}^N \frac{y_n^2 e^{-(y_n/t)^2}}{t^3 (1 + e^{-(y_n/t)^2})^2} + \\ \frac{16\sigma^2}{N} \sum_{n=1}^N \frac{y_n^4 e^{-(y_n/t)^2} (1 - e^{-(y_n/t)^2})}{t^5 (1 + e^{-(y_n/t)^2})^3} \end{aligned} \quad (24)$$

采用梯度法求解最佳阈值, 通过递推方式寻求

阈值的最佳值。梯度法计算阈值的表示式为<sup>[12]</sup>

$$t(k+1) = t(k) + \mu(-\Delta t(k)) \quad (25)$$

$\mu$  为正常数, 阈值  $t$  在  $k+1$  时刻的值等于  $k$  时刻的值加上一个修正量, 后者正比于  $-\Delta t(k)$ , 这意味着在自适应过程中的任意时刻, 均方误差  $\varepsilon$  总是沿着均方误差面最陡的方向下降, 只要  $\mu$  值选择适当, 总可使均方误差  $\varepsilon$  趋于其最小值, 也即使  $t(k)$  趋于最佳阈值  $t_{opt}$ 。

## 2 仿真实验

为了验证本文阈值函数去噪性能的有效性和优越性, 选择标准图像 Lena, Peppers, 和 House, 叠加均值为零的高斯白噪声进行实验。用 Matlab7.0 语言对新的去噪函数进行了验证, 并与经典的硬阈值和软阈值函数去噪性能进行了对比。算法步骤如下:

- 1) 置噪声方差  $\sigma = \text{const}$ ,  $t = 3\sigma$ , 分解层数  $n = 3$ ; 对原始清晰图像叠加均值为零, 方差为  $\sigma$  的高斯白噪声, 得到噪声图像;
- 2) 对噪声图像进行  $n$  层小波分解, 选择的小波为“bior4.4”, 得到小波变换系数;
- 3) 对小波变换系数进行阈值处理, 分别选择硬阈值函数、软阈值函数和新阈值函数, 得到阈值去噪

后系数;

- 4) 对去噪后系数进行逆小波变换得到去噪后图像。

图 3 给出了 Lena 标准图像中帽子部分图像去噪时的结果, 图 4 则给出了 House 标准图像中屋顶部分图像去噪时的结果, 为比较方便, 只给出了局部图像。

图 5 显示了标准图像“Peppers”降噪后的部分图像结果, 其中硬阈值函数降噪中  $t = 3\sigma$ , 软阈值函数中选取 Donoho 小波收缩阈值  $t = \sqrt{2\sigma \ln N}$ , 而新函数降噪过程中  $t$  值为自适应选取。

由图 3—5 可知, 本文函数在有效去除噪声的同时, 提高了视觉效果, 去噪后图像相对硬阈值去噪图像较光滑, 相对软阈值去噪图像则更多地保留了图像边缘等局部特征。

表 1 列出了 3 种函数去噪后图像 PSNR 值比较结果, 由表 1 可以看出, 当  $t = 3\sigma$  时, 硬阈值函数去噪后 PSNR 优于软阈值函数, 而本文去噪函数则优于硬阈值和软阈值函数, 获得了比较高的 PSNR 值。当  $t = \sqrt{2\sigma \ln N}$  为 Donoho 小波收缩阈值时, 则软阈值函数一般情况下优于硬阈值函数, 而本文函数优于硬阈值函数, 比软阈值函数去噪结果差。

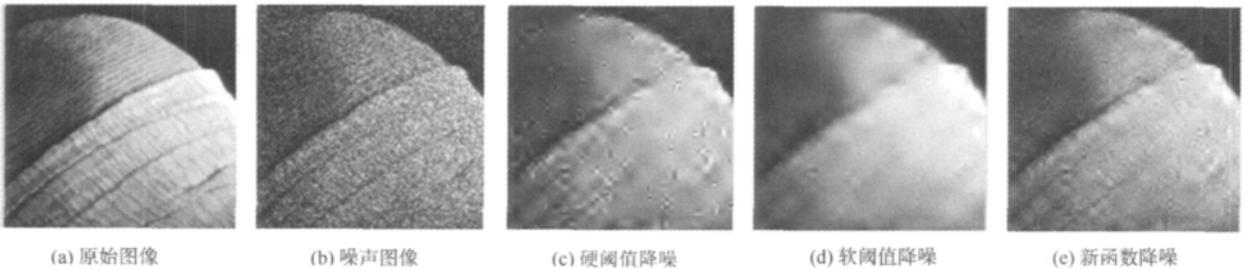


图 3 Lena 帽子部分图像降噪 ( $\sigma = 20$ )

Fig. 3 Part of Lena image denoised result ( $\sigma = 20$ )

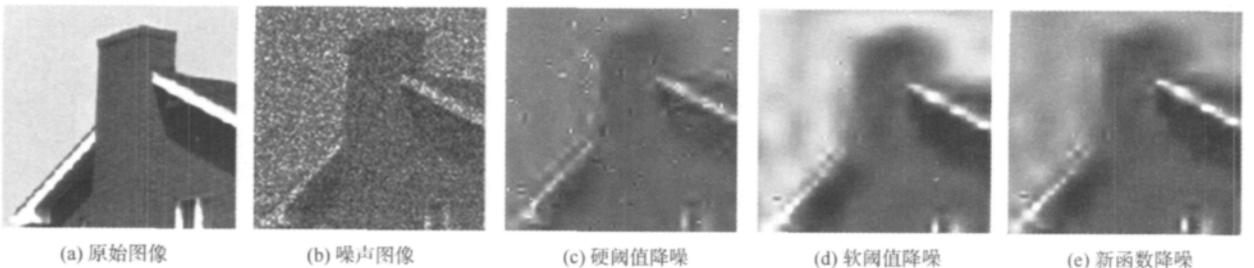


图 4 House 图像屋顶部分降噪 ( $\sigma = 60$ )

Fig. 4 Part of House image denoised result ( $\sigma = 60$ )

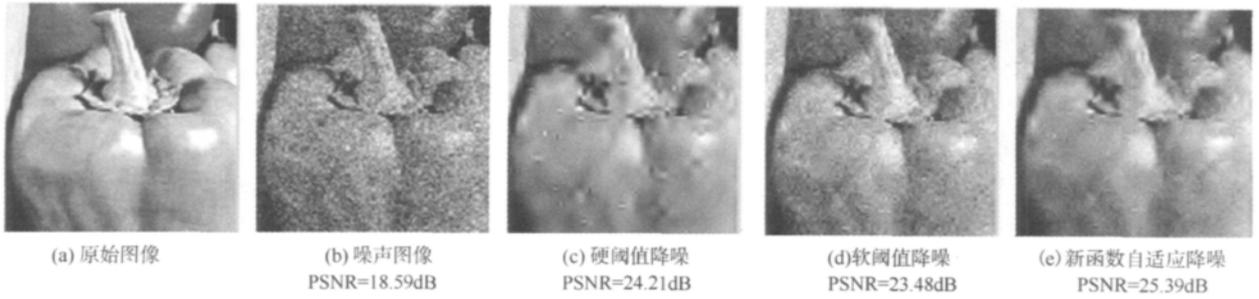


图 5 Peppers 部分图像降噪(  $\sigma = 30$  )

Fig.5 Part of Peppers image denoised result (  $\sigma = 30$  )

表 1 各种方法去噪后 PSNR 值比较

Tab.1 PSNR comparison of several thresholding function for image denoising

		/dB									
$t$	$\sigma$	含噪图像 RSNR/dB	Lena ( 512 × 512 )			Paper( 256 × 256 )			House ( 256 × 256 )		
			软阈值	硬阈值	新函数	软阈值	硬阈值	新函数	软阈值	硬阈值	新函数
$3\sigma$	10	28.13	29.73	32.00	33.13	27.67	30.64	31.73	29.19	31.78	32.85
	20	22.11	26.71	28.47	29.43	24.22	26.53	27.62	25.95	28.11	28.99
	30	18.59	25.00	26.34	27.18	22.34	24.21	25.22	24.14	25.73	26.61
	40	16.09	23.80	24.82	25.55	21.11	22.57	23.56	22.92	24.16	24.92
	50	14.15	22.84	23.66	24.71	20.21	21.29	22.30	21.97	22.88	23.65
	60	12.57	22.03	22.64	24.05	19.53	20.33	21.29	21.21	21.92	22.97
$\sqrt{2\sigma \ln N}$	10	28.13	32.14	29.82	32.51	30.81	29.30	30.74	31.88	29.54	31.13
	20	22.11	28.06	23.06	24.33	26.88	22.81	23.88	27.60	22.89	24.01
	30	18.59	24.35	19.18	20.10	23.48	19.05	19.80	23.89	19.07	19.87
	40	16.09	21.38	16.50	17.20	20.71	16.41	16.98	20.97	16.43	17.02
	50	14.15	19.01	14.46	15.01	18.47	14.39	14.84	18.64	14.40	14.87
	60	12.57	17.05	12.81	13.25	16.60	12.76	13.13	16.72	12.77	13.14

由表 1 可知,  $t$  值的选取对噪声的去除有很大影响, 因此本文利用新函数对部分图像进行了基于 SURE 无偏估计的自适应去噪实验, 表 2 列出了相应的去噪结果, 新函数去噪后的 PSNR

值相对于经典硬阈值函数与软阈值函数都要高, 同时, 本文自适应去噪后其均方误差 MSE 最小, 在均方误差最小意义下本文新函数去噪性能最优。

表 2 新函数自适应去噪后 PSNR 值

Tab.2 PSNR value of new thresholding function for image adaptive denoising

		/dB											
$\sigma$		Lena 512 × 512						Peppers 256 × 256					
		10	20	30	40	50	60	10	20	30	40	50	60
输入		28.13	22.11	18.59	16.09	14.15	12.57	28.13	22.11	18.59	16.09	14.15	12.57
新函数		34.52	29.35	27.64	26.04	24.91	24.09	31.86	27.97	25.39	24.24	22.54	21.92

### 3 结 论

本文提出了一种新的去噪函数,它不但可以起到去除图像噪声的作用,而且函数表达式简单且具有无穷阶导数,便于进行各种数学处理,与硬阈值函数和软阈值函数相比具有明显的优越性。本文用它取代了经典的硬阈值和软阈值函数应用于图像降噪中,在小波变换域中对图像进行去噪。实验结果表明本文新函数是有效可行的,优于经典的软、硬阈值函数,获得了比较高的PSNR值,同时MSE值最小。其次,去噪图像更多地保持了硬阈值函数去噪时的边缘等局部特征,同时也保持了软阈值函数的平滑性,进一步提高了去噪图像的主观质量。由于新函数具有自适应性,因此为自适应图像去噪提供了可能。

### 参考文献(References)

- [1] Donoho D L. Denoising by soft-thresholding [J]. IEEE Trans. Inform Theory, 1995, 41(3): 613-627.
- [2] Lin Ying, Chang Yonggui, Li Wenju, et al. A denoising algorithm of wavelet threshold based on a new thresholding function [J]. Noise and Vibration Control, 2008, 28(1): 79-81. [林颖, 常永贵, 李文举, 等. 基于一种新阈值函数的小波阈值去噪研究 [J]. 噪声与振动控制, 2008, 28(1): 79-81.]
- [3] Hou Ruifeng, Guo Ke. A new threshold function denoising method based on wavelet transform [J]. Modern Computer, 2009, 301(2): 39-41. [侯锐锋, 郭科. 基于小波变换的新阈值函数去噪方法 [J]. 现代计算机, 2009, 301(2): 39-41.]
- [4] Fei Shuangbo, Zhao Ruizhen. Image denoising with wavelet threshold based on SURE rule [J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2007, 31(2): 15-18. [费双波, 赵瑞珍. SURE 准则的图像小波阈值去噪 [J]. 北京交通大学学报, 2007, 31(2): 15-18.]
- [5] Liu Shoushan, Yang Chenlong, Li Ling, et al. Adaptive wavelet thresholding based ultrasonic signal denoising [J]. Journal of Zhejiang University, 2007, 41(9): 1557-1560. [刘守山, 杨辰龙, 李凌, 等. 基于自适应小波阈值的超声信号消噪 [J]. 浙江大学学报, 2007, 41(9): 1557-1560.]
- [6] Hu Bo, Chen Ken, Xu Jianyu. A method for image denoising based on new wavelet packet threshold [J]. Journal of Ningbo University, 2009, 22(4): 454-458. [胡波, 陈恳, 徐建瑜. 一种基于新型小波包阈值的图像去噪方法 [J]. 宁波大学学报, 2009, 22(4): 454-458.]
- [7] Tian Yujing, Zuo Hongwei, Zhu Zhouhua. Research on wavelet threshold and the application of RLS adaptive algorithm speech denoising approach [J]. Journal of Wenzhou Vocational & Technical College, 2009, 9(3): 59-60. [田玉静, 左红伟, 朱周华. 小波阈值和 RLS 自适应算法语音消噪应用研究 [J]. 温州职业技术学院学报, 2009, 9(3): 59-60.]
- [8] Qu Tianshu, Dai Yisong, Wang Shuxun. Adaptive wavelet thresholding denoising method based on SURE estimation [J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(2): 266-268. [曲天书, 戴逸松, 王树勋. 基于 SURE 无偏估计的自适应小波阈值去噪 [J]. 电子学报, 2002, 30(2): 266-268.]
- [9] Burce A G, Gao H Y. Understanding waveshrink: variance and bias estimation [J]. Biometrika, 1996, 83(4): 727-745.
- [10] Florian Luisier, Thierry Blu. A new SURE approach to image denoising: interscale orthonormal wavelet thresholding [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(3): 593-606.
- [11] Stein C. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution [J]. Ann. Statist, 1981, 9: 1135-1151.
- [12] Huang Pukan, Chen Jianwen, Lou Shengqiang. Modern Digital Signal Processing [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003: 105-111. [皇甫堪, 陈建文, 楼生强. 现代数字信号处理 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2003: 105-111.]