文章编号：0494-0911(2012)03-0053-03　　中图分类号：P226.3　　文献标识码：B

平面直角坐标与空间直角坐标间的协方差转换

孙小荣[1,2,3]，徐爱功[4]，张书毕[2,3]，赵长胜[5]

(1. 宿迁学院 建筑工程系，江苏 宿迁 223800; 2. 中国矿业大学 国土环境与灾害监测国家测绘局重点实验室，江苏 徐州 221116; 3. 中国矿业大学 环境与测绘学院，江苏 徐州 221116; 4. 辽宁工程技术大学 测绘与地理科学学院，辽宁 阜新 123000; 5. 徐州师范大学 测绘学院，江苏 徐州 221116)

Covariance Conversion between Rectangular Plane Coordinate and Rectangular Space Coordinate

SUN Xiaorong, XU Aigong, ZHANG Shubi, ZHAO Changsheng

摘要：推导出由大地坐标转换为高斯平面直角坐标严密的全微分公式，导出由高斯平面直角坐标向大地坐标再由大地坐标向空间直角坐标严密的协方差转换公式，并在此基础上，导出直接由高斯平面直角坐标向空间直角坐标近似的协方差转换公式，且举例说明其转换过程。结果表明，两种转换方法是等价的。

关键词：高斯平面直角坐标；大地坐标；空间直角坐标；协方差转换

一、引　言

GPS 测量得到的坐标是 WGS-84 坐标系，而我国常用的是 1954 北京坐标系和 1980 西安坐标系，有的地方还采用自定义的独立坐标系。可以通过平面或空间转换模型得到 1954 北京坐标系、1980 西安坐标系或地方坐标系坐标[1-4]。

空间转换模型主要有布尔沙模型、莫洛金斯基模型、多项式回归模型、范式模型和武测模型等[1-4]。而利用空间转换模型进行坐标转换，需要已知公共点在两个坐标系中的空间直角坐标 X、Y、Z。对于 WGS-84 坐标系坐标，X、Y、Z 可直接测得，而对于 1954 北京坐标系、1980 西安坐标系和地方坐标系坐标，因以往用常规技术测得的是二维高斯平面直角坐标 x、y，大地高 H 通常是未知的，所以无法求得其 X、Y、Z，也就无法利用空间转换模型进行坐标转换。因此，在实际应用中，需对 1954 北京坐标系、1980 西安坐标系或地方坐标系的 x、y 进行高斯投影坐标反算，从而得到大地纬度 B 和大地经度 L，再用水准高 h 代替 H，进而得到 X、Y、Z，且认为转换得到的也是 h。此种代替虽然实质上得到的并不是严格的 X、Y、Z，但文献[4-5]证明了此种代替主要表现为对 h 的影响，对 x、y 的影响较小。

除了研究坐标转换模型，还要研究坐标精度的转换，文献[6]研究了 X、Y、Z 向 x、y、h 的精度转换。空间转换模型是以公共点在两个坐标系中的 X、Y、Z 之差为误差方程的常数项，在现有的文献与软件中，认为是等精度观测值，而实际是不合理的。本文研究 x、y、h 协方差与 X、Y、Z 协方差之间的转换，在此基础上，可得到坐标差的协方差。

二、x、y、h 协方差转换为 X、Y、Z 协方差

1. 严密公式

转换过程分两步进行，首先将 x、y 协方差转换为 B、L 协方差，然后将 B、L、H 协方差转换为 X、Y、Z 协方差。

(1) x、y 协方差转换为 B、L 协方差

略去二次以上微小量，高斯投影坐标正算公式可写为[2,6-7]

$$\begin{aligned} x &= X + \frac{N}{2}\sin B\cos Bl^2 + \frac{N}{24}\sin B\cos^3 B(5 - t^2)l^4 \\ y &= N\cos Bl + \frac{N}{6}\cos^3 B(1 - t^2)l^3 \end{aligned} \tag{1}$$

式中，经差 $l = L - L_0$，单位为弧度；$t = \tan B$；子午线弧长 $X = \int_0^B M\mathrm{d}B$；子午圈曲率半径 $M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}$，

收稿日期：2011-12-21
基金项目：宿迁学院科研基金(KY0815)；国土环境与灾害监测国家测绘局重点实验室开放基金(LEDM2010C01)；江苏省高校自然科学研究项目(11KJD420002)；宿迁市科技计划项目(B2010013)
作者简介：孙小荣(1980—)，男，江苏江都人，博士生，讲师，主要从事卫星定位及组合导航方面的研究工作。

$W=\sqrt{1-e^2\sin^2 B}$；卯酉圈曲率半径 $N=\dfrac{a}{W}$。

对式(1)取全微分，取一次项，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{B} \tag{2}$$

$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3}$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=[\mathrm{d}x\quad \mathrm{d}y]^{\mathrm{T}}$；$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=[\mathrm{d}B\quad \mathrm{d}l]^{\mathrm{T}}$，单位为 s。

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} x_B & x_l \\ y_B & y_l \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\rho}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} y_l & -x_l \\ -y_B & x_B \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}|=x_By_l-x_ly_B$$

文献[6-7]给出了 x_B、x_l、y_B、y_l 的具体形式，但推导较繁琐，且是近似公式，本文推证出形式简单、易于推导的严密公式，经整理后得

$$\left.\begin{aligned} x_B&=\frac{\partial x}{\partial B}=M+\frac{1}{2}(-M\sin^2 B+N\cos^2 B)l^2 \\ x_l&=\frac{\partial x}{\partial l}=N\left[1+\frac{1}{6}(5-6\sin^2 B)l^2\right]\sin B\cos Bl \\ y_B&=\frac{\partial y}{\partial B}=-\left[M+\frac{1}{6}(M-2M\sin^2 B+\right. \\ &\qquad \left.4N\cos^2 B)l^2\right]\sin B \\ y_l&=\frac{\partial y}{\partial l}=N\left[1+\frac{1}{2}(1-2\sin^2 B)l^2\right]\cos B \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

具体推导过程略。推导中用到了子午线弧长 X 的导数 $\mathrm{d}X=M$ 和文献[7]中的结论 $\dfrac{\mathrm{d}(N\cos B)}{\mathrm{d}B}=-M\sin B$。

若已知某点 B、L 的协方差阵 $\boldsymbol{D}_{BL}$，根据式(2)，由协方差传播律可得该点 x、y 的协方差阵 $\boldsymbol{D}_{xy}$

$$\boldsymbol{D}_{xy}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_{BL}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

若已知某点 x、y 的协方差阵，根据式(3)，由协方差传播律可得该点 B、L 的协方差阵 $\boldsymbol{D}_{BL}$

$$\boldsymbol{D}_{BL}=(\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{D}_{xy}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

(2) B、L、H 协方差转换为 X、Y、Z 协方差

B、L、H 与 X、Y、Z 之间的关系式为[2,7]

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (N+H)\cos B\cos L \\ (N+H)\cos B\sin L \\ [N(1-e^2)+H]\sin B \end{bmatrix} \tag{7}$$

对式(7)取全微分，取一次项，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{J}\mathrm{d}\boldsymbol{B} \tag{8}$$

$\boldsymbol{J}$ 是可逆矩阵，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{J}^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{9}$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=[\mathrm{d}X\quad \mathrm{d}Y\quad \mathrm{d}Z]^{\mathrm{T}}$；$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=[\mathrm{d}B\quad \mathrm{d}L\quad \mathrm{d}H]^{\mathrm{T}}$；

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} -\dfrac{(M+H)\sin B\cos L}{\rho} & -\dfrac{(N+H)\cos B\sin L}{\rho} & \cos B\cos L \\ -\dfrac{(M+H)\sin B\sin L}{\rho} & \dfrac{(N+H)\cos B\cos L}{\rho} & \cos B\sin L \\ \dfrac{(M+H)\cos B}{\rho} & 0 & \sin B \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}^{-1}=\begin{bmatrix} -\dfrac{\rho\sin B\cos L}{M+H} & -\dfrac{\rho\sin B\sin L}{M+H} & \dfrac{\rho\cos B}{M+H} \\ -\dfrac{\rho\sin L}{(N+H)\cos B} & \dfrac{\rho\cos L}{(N+H)\cos B} & 0 \\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B \end{bmatrix}$$

若已知某点 B、L、H 的协方差阵 $\boldsymbol{D}_{BLH}$，根据式(8)，由协方差传播律可得该点 X、Y、Z 的协方差阵 $\boldsymbol{D}_{XYZ}$

$$\boldsymbol{D}_{XYZ}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{D}_{BLH}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

若已知某点 X、Y、Z 的协方差阵 $\boldsymbol{D}_{XYZ}$，根据式(9)，由协方差传播律可得该点 B、L、H 的协方差阵 $\boldsymbol{D}_{BLH}$

$$\boldsymbol{D}_{BLH}=(\boldsymbol{J}^{-1})\boldsymbol{D}_{XYZ}(\boldsymbol{J}^{-1})^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

综合式(3)和式(8)，以 h 代替 H，则得严密公式

$$\boldsymbol{D}_{XYZ}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}_{xyh}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

式中，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{F}$；$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & A_{12}^{-1} & 0 \\ A_{21}^{-1} & A_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；$A_{ij}^{-1}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 中的相应元素；$\boldsymbol{D}_{xyh}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{xy} & \\ & \boldsymbol{D}_h \end{bmatrix}$。

2. 近似公式

上面 C 为两个矩阵的乘积，由于经差 l 是以弧度为单位，是一个很小的量，因此可略去 l 的二次及以上项，并考虑到 H 比 N 小得多，M 略小于 N，$M+H$ 近似认为 M，$N+H$ 近似认为 N，则可得近似公式

$$\boldsymbol{D}_{XYZ}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}_{xyh}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

式中

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}$$

其中，$G_{11}=-\sin B(l\sin L+\cos L)$；$G_{12}=l\sin^2 B\cos L-\sin L$；$G_{13}=\cos B\cos L$；$G_{21}=\sin B(l\cos L-\sin L)$；$G_{22}=l\sin^2 B\sin L+\cos L$；$G_{23}=\cos B\sin L$；$G_{31}=\cos B$；$G_{32}=-l\sin B\cos B$；$G_{33}=\sin B$。

三、X、Y、Z 协方差转换为 x、y 协方差

坐标转换后，可得到点在 1954 北京坐标系、1980 西安坐标系或地方坐标系下的 X、Y、Z 及其协方差，还需将 X、Y、Z 的协方差转为 x、y 的协方差。

1. 严密公式

综合式(2)和式(9),得

$$D_{xy}=KD_{XYZ}K^{T} \tag{14}$$

式中,$K=AR$; $R=\begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} & J_{13}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} & J_{23}^{-1} \end{bmatrix}$; J_{ij}^{-1} 为矩阵 J^{-1} 中的相应元素。

2. 近似公式

由文献[8]得

$$D_{xy}=SD_{XYZ}S^{T} \tag{15}$$

式中

$$S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix}$$

其中,$S_{11}=-\sin B(l\sin L+\cos L)$; $S_{12}=\sin B(l\cos L-\sin L)$; $S_{13}=\cos B$; $S_{21}=l\sin^2 B\cos L-\sin L$; $S_{22}=l\sin^2 B\sin L+\cos L$; $S_{23}=-l\sin B\cos B$。

四、计算与分析

已知 1954 北京坐标系中某点 $B=45°$,$L=120°$,经差 $l=3°$,水准高 $H=10\ 000$ m,高斯平面直角坐标的协方差阵 $D_{xy}=\begin{bmatrix} 33 & 12 \\ 12 & 63 \end{bmatrix}\times 10^{-6}$,水准高的方差 $D_h=51\times 10^{-6}$,分别按严密公式和近似公式计算空间直角坐标协方差阵 D_{XYZ}。

1) 严密公式

$$D_{XYZ}=\begin{bmatrix} 51.71 & 13.52 & -11.36 \\ 13.52 & 53.85 & 4.29 \\ -11.36 & 4.29 & 41.60 \end{bmatrix}\times 10^{-6}$$

$m_X=\pm 0.007\ 2$ m,$m_Y=\pm 0.007\ 3$ m,$m_Z=\pm 0.007\ 3$ m

2) 近似公式

$$D_{XYZ}=\begin{bmatrix} 51.69 & 13.52 & -11.36 \\ 13.52 & 53.84 & 4.30 \\ -11.36 & 4.30 & 41.60 \end{bmatrix}\times 10^{-6}$$

$m_X=\pm 0.007\ 2$ m,$m_Y=\pm 0.007\ 3$ m,$m_Z=\pm 0.007\ 3$ m

严密公式和近似公式计算空间直角坐标中误差的结果完全相同。

计算可知大地坐标转换为高斯平面直角坐标的全微分公式系数阵 A 中的元素与文献[6-7]中结果相差 1×10^{-7} 量级,对 D_{XYZ} 的计算结果没有影响。

五、结束语

本文导出的公式可用于由高斯平面直角坐标向大地坐标和由大地坐标向空间直角坐标进行严密的协方差转换。直接由高斯平面直角坐标向空间直角坐标近似的协方差转换公式与严密公式计算结果相同。

参考文献:

[1] 李征航,黄劲松. GPS 测量与数据处理[M]. 武汉: 武汉大学出版社,2005: 167-171.

[2] 张华海,王宝山,赵长胜. 应用大地测量学[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社,2008: 212-215.

[3] 施一民. 现代大地控制测量[M]. 北京: 测绘出版社,1999: 60-62.

[4] 王解先,王军,陆彩萍. WGS-84 与北京 54 坐标的转换问题[J]. 大地测量与地球动力学,2003,23(3): 70-73.

[5] 王解先,邱杨媛. 高程误差对七参数转换的影响[J]. 大地测量与地球动力学,2007,27(3): 25-27.

[6] 赵长胜,乔仰文,张贵元. 空间直角坐标向高斯平面坐标转换时精度转换公式及其应用[J]. 辽宁工程技术大学学报,1996,15(3): 299-302.

[7] 孔祥元,郭际明,刘宗泉. 大地测量学基础[M]. 武汉: 武汉大学出版社,2006: 42-44.

[8] 谢鸣宇,姚宜斌. 三维空间与二维空间七参数转换参数求解新方法[J]. 大地测量与地球动力学,2007,28(2): 104-109.

更正启事

本刊 2012 年第 1 期第 29 页《基于影像服务的 LBS 应用研究》一文中,第二作者徐爱功的单位标注错误,应为“辽宁工程技术大学测绘与地理科学学院”,即“徐爱功[2]”应改为“徐爱功[1]”。特此更正,并向徐爱功同志及读者致歉,敬请谅解。

《测绘通报》编辑部

2012 年 3 月 25 日