文章编号:0494-0911(2012)02-0059-03 中图分类号:P224.1 文献标识码:B

顾及时间和开挖深度的卡尔曼滤波模型在建筑物变形分析中的应用

陆付民,李 劲

(三峡大学 三峡库区地质灾害教育部重点实验室,湖北 宜昌 443002)

Application of Kalman Filter Model with the Time and Excavation Depth to Building Deformation Analysis

LU Fumin, LI Jin

摘要:将建筑物的变形看做时间和开挖深度的函数,使用泰勒级数建立建筑物变形与时间和开挖深度的函数关系,并将泰勒级数的余项及时间变化的二次方和开挖深度变化的二次方的系数的变化量看做数学期望为 0 的动态噪声,建立卡尔曼滤波模型,并用于建筑物变形的预测预报。实例计算表明,模型的拟合效果和预测效果较好。

关键词:变形分析;建筑物;动态噪声;卡尔曼滤波;开挖深度

一、引 言

文献[1]将建筑物(住宅楼)的变形看做基坑开挖深度的函数,建立建筑物的变形与基坑开挖深度的多项式关系,然后将多项式的系数看做包含有动态噪声的状态向量,建立卡尔曼滤波模型,并进行建筑物的变形预测。事实上,建筑物的变形不仅与基坑的开挖深度有关,而且与时间有关,为此,可以将建筑物的变形看做时间及基坑开挖深度的函数,并以泰勒(Taylor)级数为基础,建立建筑物的变形与时间及基坑开挖深度的函数关系,通过卡尔曼滤波法,建立建筑物的变形预测模型,并对建筑物的变形进行预测。通过对该建筑物上 CJ10 监测点的计算,表明建立的建筑物变形预测模型的拟合效果和预测效果较好。

二、卡尔曼滤波模型

离散线性系统的卡尔曼滤波模型的状态方程和观测方程分别为[2-7]

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{\Omega}_k \tag{1}$$

$$\boldsymbol{L}_{k+1}=\boldsymbol{B}_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1}+\boldsymbol{\Delta}_{k+1} \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{X}_k$ 和 $\boldsymbol{L}_k$ 分别为 t_k 时刻的状态向量和观测向量;$\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}$ 为 t_k 时刻至 t_{k+1} 时刻的状态转移矩阵;$\boldsymbol{B}_{k+1}$ 为 t_{k+1} 时刻的观测矩阵;$\boldsymbol{\Omega}_k$ 和 $\boldsymbol{\Delta}_k$ 分别为 t_k 时刻的动态噪声和观测噪声。

卡尔曼滤波模型的随机模型为[2-6]

$$\left.\begin{array}{l}E(\boldsymbol{\Omega}_k)=0,E(\boldsymbol{\Delta}_k)=0,\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Omega}_j)=\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Omega}}(k)\delta_{kj}\\ \mathrm{cov}(\boldsymbol{\Delta}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Delta}}(k)\delta_{kj},\mathrm{cov}(\boldsymbol{\Omega}_k,\boldsymbol{\Delta}_j)=0\\ E(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{\mu}_X(0)=\boldsymbol{X}(0/0),\mathrm{var}(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{D}_X(0)\\ \mathrm{cov}(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{\Omega}_k)=0,\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{\Delta}_k)=0\end{array}\right\} \tag{3}$$

式中,当 $j=k$ 时,$\delta_{kj}=1$;当 $j\neq k$ 时,$\delta_{kj}=0$。

由状态方程、观测方程和随机模型,即可推出如下卡尔曼滤波方程[2-6]

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{X}(k/k)=\boldsymbol{X}(k/k-1)+\boldsymbol{J}_k[\boldsymbol{L}_k-\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{X}(k/k-1)]\\ \boldsymbol{D}_X(k/k)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}_k\boldsymbol{B}_k]\boldsymbol{D}_X(k/k-1)\end{array}\right\} \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵;且

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{X}(k/k-1)=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{X}(k-1/k-1)\\ \boldsymbol{D}_X(k/k-1)=\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}\boldsymbol{D}_X(k-1/k-1)\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1}^{\mathrm{T}}+\\ \qquad \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Omega}}(k-1)\\ \boldsymbol{J}_k=\boldsymbol{D}_X(k/k-1)\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{D}_X(k/k-1)\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Delta}}(k)]^{-1}\end{array}\right\} \tag{5}$$

三、顾及时间和开挖深度的建筑物变形预测模型的建立

由于建筑物的变形不仅与基坑的开挖深度有关,而且与时间有关,因此,可以将建筑物的变形看做时间及基坑开挖深度的函数,即

$$x=x(t,h) \tag{6}$$

式中,t 为观测时间(时刻);h 为 t 时刻基坑的开挖深度;x 为 t 时刻建筑物的变形量。

由于变形观测的时间间隔较短(一天观测一

收稿日期:2011-01-18
基金项目:精密工程与工业测量国家测绘局重点实验室开放基金(PF2009-8);湖北省自然科学基金(2008CDB047)
作者简介:陆付民(1964—),男,湖北云梦人,硕士,教授,主要从事变形监测数据处理方面的研究工作。

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

次),且变形量的变化较小。现将 t_{k+1} 时刻(对应的基坑开挖深度为 h_{k+1})建筑物的变形量 $x(t_{k+1}, h_{k+1})$ 在 t_k 时刻用泰勒级数展开,仅取时间间隔及基坑开挖深度变化的一次项及二次项,得

$$x(t_{k+1},h_{k+1})=x(t_k,h_k)+(\frac{\partial x}{\partial t})_{t_k}(t_{k+1}-t_k)+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})_{t_k}(t_{k+1}-t_k)^2+(\frac{\partial x}{\partial h})_{h_k}(h_{k+1}-h_k)+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 x}{\partial h^2})_{h_k}(h_{k+1}-h_k)^2+g_k \tag{7}$$

在式(7)中,令 $v_k=(\frac{\partial x}{\partial t})_{t_k}$, $a_k=(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2})_{t_k}$, $s_k=(\frac{\partial x}{\partial h})_{h_k}$, $y_k=\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 x}{\partial h^2})_{h_k}$, $x_k=x(t_k,h_k)$,则式(7)变为

$$x_{k+1}=x_k+v_k(t_{k+1}-t_k)+\frac{1}{2}a_k(t_{k+1}-t_k)^2+s_k(h_{k+1}-h_k)+y_k(h_{k+1}-h_k)^2+g_k \tag{8}$$

式中,v_k 为 t_k 时刻的变形速度;a_k 为 t_k 时刻的变形加速度;s_k 为地下水位的变化对变形的影响;y_k 为地下水位变化的二次方对变形的影响;g_k 为泰勒级数的余项,其值微小,可以看做数学期望为 0 的动态噪声。

令

$$v_{k+1}=v_k+a_k(t_{k+1}-t_k)+c_k \tag{9}$$

$$a_{k+1}=a_k+r_k \tag{10}$$

$$s_{k+1}=s_k+y_k(h_{k+1}-h_k)+p_k \tag{11}$$

$$y_{k+1}=y_k+z_k \tag{12}$$

式(9)~式(12)中,c_k、r_k、p_k、z_k 分别为微小的扰动,也可以分别看做数学期望为 0 的动态噪声。

将式(8)~式(12)写成矩阵形式,得

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ v_{k+1} \\ a_{k+1} \\ s_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & t_{k+1}-t_k & \frac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)^2 & h_{k+1}-h_k & (h_{k+1}-h_k)^2 \\ 0 & 1 & t_{k+1}-t_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h_{k+1}-h_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ a_k \\ s_k \\ y_k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} g_k \\ c_k \\ r_k \\ p_k \\ z_k \end{bmatrix} \tag{13}$$

在式(13)中,令

$$\boldsymbol{X}_k=[x_k \quad v_k \quad a_k \quad s_k \quad y_k]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_k=[g_k \quad c_k \quad r_k \quad p_k \quad z_k]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}=\begin{bmatrix} 1 & t_{k+1}-t_k & \frac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)^2 & h_{k+1}-h_k & (h_{k+1}-h_k)^2 \\ 0 & 1 & t_{k+1}-t_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h_{k+1}-h_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则式(13)变为

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k}\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{\Omega}_k \tag{14}$$

式(14)即为卡尔曼滤波模型的状态方程。

对于变形观测,有

$$\boldsymbol{l}_{k+1}=\boldsymbol{x}_{k+1}+\boldsymbol{\Delta}_{k+1} \tag{15}$$

式中,$\boldsymbol{l}_{k+1}$ 为 t_{k+1} 时刻变形量的观测值;$\boldsymbol{\Delta}_{k+1}$ 为 t_{k+1} 时刻的观测噪声。

在式(15)中,令 $\boldsymbol{L}_{k+1}=\boldsymbol{l}_{k+1}$, $\boldsymbol{B}_{k+1}=[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$,则式(15)变为

$$\boldsymbol{L}_{k+1}=\boldsymbol{B}_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1}+\boldsymbol{\Delta}_{k+1} \tag{16}$$

式(16)即为卡尔曼滤波模型的观测方程。

由状态方程式(14)及观测方程式(16),并顾及随机模型式(3),由卡尔曼滤波方程式(4)即可进行卡尔曼滤波处理。

四、算 例

基于上述建模思路,选取 2007-06-01—2007-06-19 在某住宅楼上监测点 CJ10[1] 的沉降数据进行计算。由于基坑采用分段开挖的方法进行开挖,所以基坑不同部位开挖深度不同,本文中的开挖深度指与监测点相邻基坑一侧的开挖深度。

沉降观测值的中误差(方差)取 $D_\Delta(k)=\pm 1$ mm,另外,计算时取

$$\boldsymbol{X}(0/0)=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{D}_X(0/0)=\boldsymbol{D}_X(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_\Omega(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

有关计算结果如表 1 所示。

表 1　监测点 CJ10 的沉降监测数据与相应的滤波值

监测日期	基坑开挖深度/m	累计沉降量/mm	滤波值（拟合值）/mm	残差/mm
2007-06-01	1.2	0.9	0.631 3	-0.268 7
2007-06-02	1.3	1.3	1.274 0	-0.026 0
2007-06-03	1.5	1.8	1.820 2	0.020 2
2007-06-04	1.8	2.2	2.196 2	-0.003 8
2007-06-05	2.1	2.8	2.813 4	0.013 4
2007-06-06	2.3	3.3	3.306 3	0.006 3
2007-06-07	2.7	3.9	3.891 1	-0.008 9
2007-06-08	3.1	4.5	4.497 3	-0.002 7
2007-06-09	3.6	5.2	5.205 2	0.005 2
2007-06-10	3.9	5.6	5.590 4	-0.009 6
2007-06-11	4.1	6.0	6.006 1	0.006 1
2007-06-12	4.7	6.3	6.259 0	-0.041 0
2007-06-13	5.0	6.6	6.619 5	0.019 5
2007-06-14	5.1	6.9	6.934 7	0.034 7
2007-06-15	5.5	7.4	7.398 0	-0.002 0
2007-06-16	5.6	7.5	7.491 7	-0.008 3
2007-06-17	6.0	8.2	8.203 0	0.003 0
2007-06-18	6.3	8.5	8.487 9	-0.012 1

注:基坑开挖深度指与监测点 CJ10 相邻的基坑一侧的开挖深度;累计沉降量为监测点 CJ10 的累计沉降观测值;滤波值为使用卡尔曼滤波法求出的累计沉降量的拟合值;残差为滤波值与累计沉降量之差。

由表 1 可以看出,使用卡尔曼滤波法求出的残差较小,最大为 -0.268 7 mm,最小只有 -0.002 0 mm,且仅有一个残差超过 0.2 mm,其余残差都小于 0.1 mm。另外,残差的符号有正有负,正负残差接近各占一半,表明残差具有随机性。因此,卡尔曼滤波法的拟合误差较小。采用卡尔曼滤波法预测 CJ10 监测点 2007-06-19 的沉降值为 8.94 mm,而该点 2007-06-19 的实测沉降值为 9.3 mm,预测误差为 0.36 mm,预测效果较好。

五、结束语

本文将建筑物的变形看做是时间和开挖深度的函数,使用泰勒级数建立建筑物的变形与时间和开挖深度的函数关系,并将泰勒级数的余项及时间变化的二次方和开挖深度变化的二次方的系数的变化量等看做数学期望为 0 的动态噪声,建立卡尔曼滤波模型,并用于建筑物的变形预测预报。实例计算表明卡尔曼滤波模型的拟合效果和预测效果较好,可用于建筑物变形的短期预测预报。

参考文献:

[1] 郑加柱,光辉. 顾及开挖深度的卡尔曼滤波模型在基坑变形分析中的应用[J]. 测绘通报,2009(5):49-51.

[2] 周乐韬,黄丁发,袁林果,等. 网络 RTK 参考站间模糊度动态解算的卡尔曼滤波算法研究[J]. 测绘学报,2007,36(1):37-42.

[3] 崔希璋,於宗俦,陶本藻,等. 广义测量平差[M]. 北京:测绘出版社,1992.

[4] 王正明,易东云. 测量数据建模与参数估计[M]. 长沙:国防科技大学出版社,1997.

[5] 陆付民,何薪基. 基于模型筛选法的卡尔曼滤波法在大坝变形分析中的应用[J]. 水电自动化与大坝监测,2003,26(4):55-57.

[6] 陆付民. 模型优化法在滑坡变形分析中的应用[J]. 勘察科学技术,2003,21(2):48-51.

[7] 陆付民,王尚庆. 基于指数趋势模型的卡尔曼滤波法在危岩体变形分析中的应用[J]. 岩土力学,2008,29(6):1716-1718.

(上接第 53 页)

五、结束语

经调试和试验证明,该程序成功实现了对 CAD 地形图件的平面坐标转换和高斯投影换带功能。其关键有两点:一是要了解清楚 DXF 文件的结构;二是要编写出准确实现平面坐标系转换与高斯投影换带的子程序。程序的核心是利用平面四参数转换法与高斯投影换带对 CAD 图形中的点、线、面等结构的实体进行坐标转换。程序的转换精度完全取决于由转换公共点计算出的转换参数的精度,转换参数精度越高,图形转换的精度就越高。

通过编写转换程序来进行数字地形图的转换将具有以下特点:

1) 针对 DXF 文件进行变换计算,无需重新修改地形图,节省了人力和时间,大大提高了工作效率。

2) 通过程序来自动进行地形图的转换,能有效降低转换过程中出现错误的可能性。

参考文献:

[1] 曾传俊. 空间七参数法与平面四参数法的等效性研究[D]. 武汉:武汉大学,2009.

[2] 汤小林. AutoCAD 下图形高斯投影换带方法的实现[J]. 矿山测量,2008(2):24-26.

[3] 求实科技. Visual Basic 6.0 程序设计与开发技术大全[M]. 北京:人民邮电出版社,2004.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net