

# 平面坐标转换参数的解耦算法

杜 兰, 王若璞, 王占统, 马高峰

(信息工程大学 测绘学院, 河南 郑州 450052)

## Decoupling Algorithm of Plane Coordinate Transformation Parameters

DU Lan, WANG Ruopu, WANG Zhantong, MA Gaofeng

**摘要:** 基于公共点点位反解平面坐标转换四参数的整体平差由于量纲问题可能出现病态法矩阵, 分析病态性的产生机理, 提出利用原始点位的重心化改造对解算参数去耦合。在计算重心以及独立解算尺度因子和旋转参数的过程中, 提出同时顾及两套点位精度的加权方法。给出基于矩阵计算的解算流程, 通用性好, 便于程序实现。

**关键词:** 坐标转换; 病态性; 重心化坐标

### 一、引言

平面直角坐标系间的坐标转换包括平移、旋转和缩放<sup>[1]</sup>。基于两坐标系下公共点点位坐标的转换参数反解问题在大地与工程测量以及摄影测量与遥感等领域应用极为广泛。

记两坐标系下公共点集的  $n$  个点位坐标矩阵分别为  $X_1$  和  $X_2$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \end{bmatrix}$$

且每对公共点坐标满足四参数变换模型

$$\begin{bmatrix} x_{2i} \\ y_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ y_{1i} \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中  $(x_0, y_0)$  为平移参数;  $\lambda$  是尺度参数;  $\theta$  为转动角。

为避免大角度转动情况下的三角函数运算, 通常求解尺度和转动参数的组合形式即  $(x_0, y_0, \lambda \cos \theta, \lambda \sin \theta)$ 。此时的误差方程为线性形式

$$\begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_{1i} & y_{1i} \\ 0 & 1 & y_{1i} & -x_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \lambda \cos \theta \\ \lambda \sin \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{2i} \\ y_{2i} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中  $(v_{x_i}, v_{y_i})$  为点集  $X_1$  中第  $i$  个点的坐标残差。

当公共点不少于两个时, 可利用最小二乘求解 4 个转换参数。在实际解算中由于平移参数与其他参数常出现几个甚至十几个数量级的取值差异, 这种大小数引起的病态法矩阵往往影响部分参数的

解算精度<sup>[2]</sup>。

针对上述整体平差的不足, 本文分析了整体平差的法矩阵形式, 指出了病态性的产生机理, 提出利用原始点位的重心化改造实现解算参数的去耦合。此外, 针对传统误差方程式(2)仅仅考虑单个点集的坐标误差<sup>[3]</sup>, 本文在解耦算法中同时顾及了两套点位噪声的影响, 表达直观, 且理论上更加完善。

### 二、坐标转换参数间的解耦性分析

为公式书写简便起见, 令公共点的点位误差均独立且等精度。由式(2)写出四参数整体平差的法矩阵

$$N = \begin{bmatrix} n & 0 & \sum x_{1i} & \sum y_{1i} \\ 0 & n & \sum y_{1i} & -\sum x_{1i} \\ \sum x_{1i} & \sum y_{1i} & \sum r_{1i}^2 & 0 \\ \sum y_{1i} & -\sum x_{1i} & 0 & \sum r_{1i}^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中  $\sum x_{1i}$  和  $\sum y_{1i}$  分别为  $X_1$  点集的两坐标分量之和;  $\sum r_{1i}^2 = \sum (x_{1i}^2 + y_{1i}^2)$  为点位向径的平方和。

法矩阵的条件数为

$$\text{cond}(N) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min} \quad (4)$$

式中  $\text{cond}()$  表示取条件数;  $\lambda_{\max}$  和  $\lambda_{\min}$  分别表示矩阵  $N$  的最大和最小特征值。

为反映问题方便起见, 考虑法矩阵  $N$  为对角阵的特殊情况, 若公共点个数有限且各点位向径较大或采用单位不当使得取值大, 则条件数  $\text{cond}(N) = \frac{1}{n} \sum r_{1i}^2$  会变得非常大, 从而导致法方程表现出较强

的病态性。

上述的极端条件虽然少见,却提供了参数解耦的改造方法。若法矩阵  $N$  为对角阵,相应的法方程即可分别独立解算,从而避免大小数对整体平差解算精度的影响。

观察非对角线元素,显然只需要满足  $\sum x_{1i}$  和  $\sum y_{1i}$  均为0。若将原坐标系的原点平移至点集的重心,则重心坐标  $[\frac{1}{n}\sum x_{1i}, \frac{1}{n}\sum y_{1i}]$  为(0,0)。因此,经过重心化改造后的对角化法矩阵可以实现参数的解耦计算。

### 三、坐标转换参数的解耦算法

#### 1. 点位重心化

令  $(x_{1G}, y_{1G})$  和  $(x_{2G}, y_{2G})$  分别为两点集  $X_1$  和  $X_2$  的重心坐标,且分别对应于  $n$  个点位的加权平均<sup>[4]</sup>(仍暂令公共点的点位误差均独立且等精度)

$$\left. \begin{aligned} x_{1G} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i} \\ y_{1G} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{1i} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} x_{2G} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i} \\ y_{2G} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{2i} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将两坐标系的原点分别平移至各自点集的重心处,定义两个新的点集

$$X'_1 = \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x'_{1n} \\ y'_{11} & y'_{12} & \cdots & y'_{1n} \end{bmatrix}, X'_2 = \begin{bmatrix} x'_{21} & x'_{22} & \cdots & x'_{2n} \\ y'_{21} & y'_{22} & \cdots & y'_{2n} \end{bmatrix}$$

并满足

$$\left. \begin{aligned} x'_{1i} &= x_{1i} - x_{1G} \\ y'_{1i} &= y_{1i} - y_{1G} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} x'_{2i} &= x_{2i} - x_{2G} \\ y'_{2i} &= y_{2i} - y_{2G} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将式(5)和式(6)代入式(1),得到的重心化点集之间去除了平移转换(如图1(b)所示),即

$$\begin{bmatrix} x'_{2i} \\ y'_{2i} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{1i} \\ y'_{1i} \end{bmatrix} \quad (7)$$

#### 2. 旋转参数和缩放参数的解算

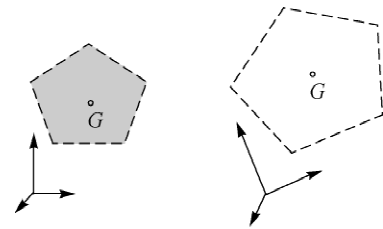
从图1的图形化对比可以看出,原点集的平移、旋转和缩放信息通过重心化,其平移信息已完全被重心平移所吸收,重心化点集仅包含旋转和缩放信息。

式(7)的误差方程为

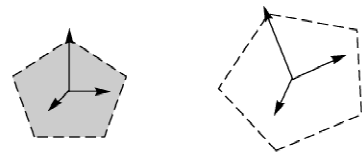
$$\begin{bmatrix} v'_{x_i} \\ v'_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_{1i} & y'_{1i} \\ y'_{1i} & -x'_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \cos \theta \\ \lambda \sin \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x'_{2i} \\ y'_{2i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中  $(v'_{x_i}, v'_{y_i})$  为第  $i$  个重心化点的坐标残差。两原始点集的点位误差将影响其重心坐标进而影响各自重心化点位坐标。对式(6)进行误差传播,容易得到重心化前后的点位中误差之比为

$\sqrt{n/(n-1)}$ 。显然,当公共点个数较多时,重心化点集基本保持原始点集的点位精度。



(a) 原点集之间的空间关系



(b) 重心化点集之间的空间关系

图1

法方程解算公式为

$$\begin{bmatrix} \lambda \cos \theta \\ \lambda \sin \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum r_{1i}^2} \begin{bmatrix} \sum (x'_{1i}x'_{2i} + y'_{1i}y'_{2i}) \\ \sum (x'_{2i}y'_{1i} - x'_{1i}y'_{2i}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中  $\sum r_{1i}^2 = \sum (x_{1i}^2 + y_{1i}^2)$  为重心化点集  $X'_1$  点位向径的平方和。

进一步计算缩放参数

$$\hat{\lambda} = \sqrt{\lambda \cos \theta^2 + \lambda \sin \theta^2} = \sqrt{\frac{\sum r_{2i}^2}{\sum r_{1i}^2}} \quad (10)$$

从式(7)出发,依据旋转矩阵的保模性,对重心化后的两点集进行欧氏距离加权平均,同样可以直接得到式(10)的结果。

进一步计算旋转参数,有

$$\tan \hat{\theta} = \frac{\lambda \sin \theta}{\lambda \cos \theta} = \frac{\sum [x'_{2i}y'_{1i} - x'_{1i}y'_{2i}]}{\sum [x'_{1i}x'_{2i} + y'_{1i}y'_{2i}]} \quad (11)$$

#### 3. 平移参数的解算

当公共点集  $X_1$  经旋转、缩放和平移变换后和  $X_2$  完全重叠时,两点集应具有相同的重心(如图1(a)所示)。即两重心间也满足四参数变换模型

$$\begin{bmatrix} x_{2G} \\ y_{2G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1G} \\ y_{1G} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1G} \\ y_{1G} \end{bmatrix} \quad (12)$$

当旋转与缩放参数的最优估计  $\hat{\theta}$  和  $\hat{\lambda}$  确定后,平移参数可由重心关系式(12)给出

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2G} \\ y_{2G} \end{bmatrix} - \hat{\lambda} \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} \\ -\sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1G} \\ y_{1G} \end{bmatrix} \quad (13)$$

#### 四、矩阵计算流程

引入向量矩阵形式可使公式表达简单,并可避

免式(10)和式(11)对坐标分量的大量求和计算。

1) 首先由式(5)、式(6)计算两点集的重心坐标和重心化点集坐标  $X'_1$  和  $X'_2$ 。

2) 构造  $2 \times 2$  矩阵  $S_{X_1} = X'_1 X_1^T$  和  $S_{X_2} = X'_2 X_2^T$ , 则缩放参数的计算公式为

$$\hat{\lambda} = \sqrt{\text{tr}(S_{X_2}) / \text{tr}(S_{X_1})}$$

式中  $\text{tr}(\ )$  表示求矩阵的迹。当两点集间仅有旋转而无缩放时  $S_{X_1} = S_{X_2}$ , 即缩放系数为 1。

3) 构造  $2 \times 2$  矩阵  $S = X'_1 X_2^T$ , 则旋转参数的计算公式为

$$\tan \hat{\theta} = (S_{21} - S_{12}) / (S_{11} + S_{22}) \quad (14)$$

式中  $S_{ij}$  表示矩阵元素。当两点集间仅有缩放而无旋转时, 有  $X'_1 X_2^T = \lambda X'_1 X_1^T$  则  $S_{12} = S_{21}$ , 即旋转角为 0。

4) 将  $\hat{\theta}$  和  $\hat{\lambda}$  代入式(13), 计算平移量  $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ 。

这种解耦算法可同时顾及两套点位精度的加权, 在实际应用中非常方便和直观, 若利用总体最小二乘平差则相对复杂得多<sup>[5]</sup>。在涉及加权的公式中, 较为方便的处理方法是令点位之间以及点位坐标分量之间彼此独立。式(5)的重心坐标分量可以分别顾及各分量的精度, 缩放与旋转参数的解算则仅仅顾及点位之间的位置精度。如  $S_{X_1}$  和  $S_{X_2}$  矩阵的构造式可以修改为  $S_{X_1} = X'_1 M_1 X_1^T$  和  $S_{X_2} = X'_2 M_2 X_2^T$ , 式中点位误差矩阵  $M_i = \text{diag}(1/m_{i_1}^2, 1/m_{i_2}^2, \dots, 1/m_{i_n}^2)$ , 其中  $\text{diag}(\ )$  表示由对角线元素组成的对角阵;  $m_i$  表示点位中误差。同理, 矩阵  $S$  可以修改为  $S = X'_1 M_1 X_2^T$ 。

## 五、结束语

针对基于公共点(或同名点)点位的平面坐标转换参数反解问题, 提出利用重心化点位变换对法矩阵进行对角化, 从而实现解算参数的去耦合。

1) 点位重心化使得坐标旋转和缩放参数的解算与平移无关, 因而基本不受平移参数误差的影响; 类似的传统方法是将平移参数事先部分扣除。

2) 在计算重心以及独立解算尺度因子和旋转参数的过程中, 能够同时顾及两套点位精度的加权, 理论上更加严密。

3) 给出了便于程序实现的基于矩阵运算的解算流程。

## 参考文献:

- [1] 李征航, 魏二虎, 王正涛, 等. 空间大地测量学[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2010: 79-84.
- [2] 陈宇, 白征东, 罗腾. 基于改进的布尔沙模型的坐标转换方法[J]. 大地测量与地球动力学, 2010, 30(3): 72-73, 78.
- [3] 邱卫宁, 陶本藻, 姚宜斌. 测量数据处理理论与方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2008: 56-60.
- [4] UMEYAMA S. Least Squares Estimation of Transformation Parameters between Two Point Patterns [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(4): 376-380.
- [5] 孔建, 姚宜斌, 许双安. 整体最小二乘求取坐标转换参数[J]. 大地测量与地球动力学, 2010, 30(3): 74-78.

## 2010年中国测绘类期刊主要计量指标统计数据

[本刊讯] 2011年版《中国期刊引证报告(扩刊版)》已于2011年9月由科学技术文献出版社出版, 该书公布了2010年中国科技期刊的各项统计数据。“扩刊版”数据统计源期刊范围较“核心版”更为广泛, 是以我国正式出版的各学科6193种中英文期刊为统计源期刊。以下是2010年中国测绘类期刊主要计量指标统计结果:

	影响因子	总被引频次	他引率	学科影响指标	基金论文比
测绘学报	1.470	1418	0.93	1.00	0.910
遥感学报	1.373	2074	0.96	0.91	0.968
大地测量与地球动力学	1.134	1284	0.62	0.87	0.868
武汉大学学报: 信息科学版	0.905	2772	0.81	0.58	0.977
测绘科学	0.897	1832	0.85	1.00	0.627
遥感信息	0.803	756	0.95	0.96	0.766
测绘通报	0.755	2087	0.94	1.00	0.321
地理信息世界	0.644	408	0.89	0.78	0.570
测绘工程	0.628	650	0.93	0.96	0.377
测绘科学技术学报	0.490	577	0.96	1.00	0.552
测绘信息与工程	0.474	553	0.92	0.91	0.427
地理空间信息	0.472	597	0.88	0.91	0.518
测绘与空间地理信息	0.439	846	0.90	0.87	0.179

(本刊编辑部)