文章编号: 0494-0911(2011)12-0072-03 中图分类号: P208 文献标识码: B

一种改进的折线转分段 Bezier 曲线的拟合方法

张 超[1], 王文静[2]

(1. 中国地图出版社, 北京 100055; 2. 国家知识产权局专利局, 北京 100088)

An Advanced Method for Sub-section Bezier Curve Fitting

ZHANG Chao, WANG Wenjing

摘要: 提出一种改进的折线转 Bezier 曲线的拟合方法。与传统最小二乘法拟合 Bezier 曲线相比,加入能量因子能很好地约束拟合出的 Bezier 曲线控制点的扰动,并能够根据需要设定标准函数和能量因子的权重。通过对拟合结果进行对比、分析和展示,证明该方法可有效地进行 Bezier 曲线拟合,满足生产需求。

关键词: 能量法; Bezier 拟合; 曲线光顺

一、引 言

曲线拟合是计算机制图的关键技术之一,国内外许多学者对此进行了大量研究。曲线拟合的方法有很多,大致可以分为两类: 一类是要求拟合曲线严格地通过各个离散点,如样条曲线拟合; 另一类是根据离散点的趋势拟合出一条大致的曲线,且拟合曲线只是符合离散点的大致形状和趋势而不一定要经过离散点,如最小二乘拟合。这两种方法各有优缺点,后者更为常见。Bezier 曲线以其优良的性质而被广泛应用于平滑曲线建立模型,研究以 Bezier 曲线来拟合离散点的方法在实际生产中有着重要的意义。文献[1]中提出了一种传统的以三次多段 Bezier 曲线来拟合离散数据的算法。该算法提出将多个离散点构成的折线通过用多段 Bezier 曲线,采用最小二乘法进行拟合逼近,并且保证拟合后的两段相邻的 Bezier 曲线达到 $G1$ 连续,使拟合后的曲线更光顺,从而解决了折线造型困难和不易修改的问题[1]。在实际应用中,传统的最小二乘拟合算法虽然约束了分段 Bezier 的 $G1$ 连续,但在控制点的扰动方面没有约束条件,有时会出现拟合曲线两边摆动的现象,如图 1 所示。

这种情况下,虽然曲线在局部是 $G1$ 连续的,却大大破坏了拟合出来的 Bezier 曲线在整体上的光顺性,影响了拟合的质量。为了控制拟合曲线的形状变化,本文假设曲线光顺后将逼近或趋近于一些给定点,这一变化过程可通过拟合函数中的 α 约束条件来实现,即标准函数。为限定每个控制顶点的扰动幅度,本文在标准函数后增加 β 约束项,即光顺因子。最后得到的标准函数是待求未知量的二次函数,目标极小化(最小二乘法)后只需求解线性方程组即可。同时,用户也可根据光顺对象的不同,选取相应的参数 α、β 以得到一条满意的曲线。

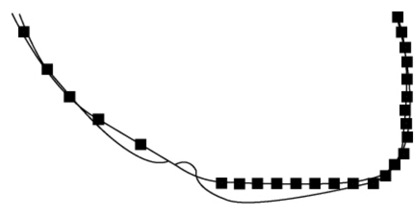

图 1 曲线的摆动现象

二、数学基础

1. 标准函数

为了保证拟合出来的多段连续的 Bezier 曲线 $G1$ 连续,除首段外,其他段拟合都要加入约束条件以保证拟合出来的相邻两段 Bezier 曲线在连接点 P 处的切矢量方向相同。

设 Q_0、Q_1、Q_2、…、Q_n 是原折线的前 $n+1$ 个点,要找一条三次 Bezier 曲线逼近由这 $n+1$ 个点连接起来的折线。根据三次 Bezier 曲线的方程

$$P(t) = P_0 \cdot f_0(t) + P_1 \cdot f_1(t) + P_2 \cdot f_2(t) + P_3 \cdot f_3(t) \quad (1)$$

式中

$$f_i = \frac{3!}{i! \cdot (3-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{3-i} \quad (i = 0, 1, \cdots, 3)$$

对于首段拟合,提出以下条件和假设:

1) 假设要拟合的 Bezier 曲线分别在 $t_i = \frac{i}{n}$ ($i =$

收稿日期: 2011-03-23
作者简介: 张 超(1985—),男,湖北潜江人,硕士,主要从事程序开发、计算机制图等工作。

0，1，…，n）上，经过点 Q_0，Q_1，Q_2，…，Q_n。

2）原始折线的两端点是要拟合的 Bezier 曲线的首尾节点，即 $P_0 = Q_0$，$P_3 = Q_n$。

3）进行最小二乘拟合。

可得式（2）

$$f(P_1,P_2) = \sum_{i=0}^{n}[Q_i - Q_0 \cdot f_0(t_i) - P_1 \cdot f_1(t_i) - P_2 \cdot f_2(t_i) - Q_n \cdot f_3(t_i)]^2 \quad (2)$$

分别令 $\frac{\partial f}{\partial P_1}=0$，$\frac{\partial f}{\partial P_2}=0$，就能得到 P_1、P_2。

同理，对于后续段 Bezier 曲线，提出以下条件和假设：

1）假设要拟合的 Bezier 曲线分别在 $t_i = \frac{i}{n}$（i = 0，1，…，n）上，经过点 Q_0、Q_1、Q_2、…、Q_n。

2）原始折线的两端点即为要拟合的 Bezier 曲线的首尾节点，即有 $P_0 = Q_0$，$P_3 = Q_n$。

3）为保证后续段曲线和前一段曲线在连接处的光滑（在连接点处切矢量方向相同，大小不等，即 $G1$ 连续），必须使两段曲线接点处的 3 个控制点共线（在一条直线上）。于是设 $P_1 = P_0 + s\boldsymbol{G}$，（式中，$\boldsymbol{G}$ 为已知的方向矢量，由前一段拟合好的 Bezier 曲线决定（两段曲线在点 P_0 切矢量相同）；s 为标量，待定参数，如图 2 所示。

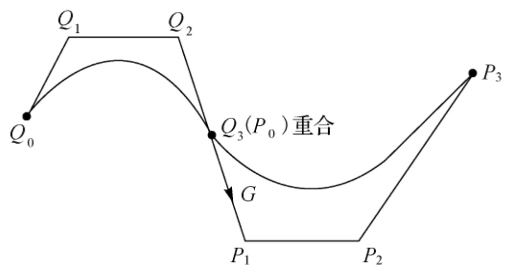

图 2　两段曲线的 $G1$ 连续

4）进行最小二乘拟合。

可得式（3）

$$f(s,x_{P2},y_{P2}) = \sum_{i=0}^{n}[x_{Q_i} - f_0(t_i)\cdot x_{P_0} - f_1(t_i)\cdot s \cdot x_G + f_2(t_i)\cdot x_{P_2} + f_3(t_i)\cdot x_{P_3}]^2 + \sum_{i=0}^{n}[y_{Q_i} - f_0(t_i)\cdot y_{P_0} - f_1(t_i)\cdot s \cdot y_G + f_2(t_i)\cdot y_{P_2} + f_3(t_i)\cdot y_{P_3}]^2 \quad (3)$$

令 $\frac{\partial f}{\partial s}=0$，$\frac{\partial f}{\partial x_{P_2}}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y_{P_2}}=0$，就能分别求出 s、x_{P_2}、y_{P_2}。将 s 代入 $P_1 = P_0 + s\boldsymbol{G}$ 中即可解出 P_1。

2．光顺因子

在工程设计中，设计者常通过观察曲率的变化来评估曲线是否光顺。如果曲线的曲率变化均匀，则认为这条曲线光顺[2]。很多学者对此已经作了研究，将其转化成数学标准。在能量标准中，通常认为式（4）或其近似值达到最小时，曲线是光顺的。

$$\int k^2(t)\ \| R'(t)\|\,\mathrm{d}t \quad (4)$$

式中，$R(t)$ 为参数曲线；$k(t)$ 为曲线的曲率。

但是在实际计算中，要使式（4）最小化，就会出现线性问题，使求解变得困难。为便于计算，通常用式（5）近似取代式（4）。即希望找到控制点，使得

$$\int \| R''(t)\|^2 \mathrm{d}t \to \min \quad (5)$$

本文采用简化能量标准作为拟合曲线的光顺因子。

三、改进算法

标准函数决定着拟合后的曲线对于原数据点的位置偏离，而光顺因子能够控制曲线的光顺度。所以，取拟合出来的 Bezier 曲线在 Q_i 处的位置偏离权为 α，曲线光顺权为 β，则改进算法可以描述为：

1）对于首段拟合出的 Bezier 曲线，由式（2）可得

$$f(P_1,P_2) = \partial\sum_{i=0}^{n}[Q_i - Q_0 f_0(t_i) - P_1 f_1(t_i) - P_2 f_2(t_i) - Q_n f_3(t_i)]^2 + \beta\sum_{i=0}^{n}[P''(t_i)]^2 \quad (6)$$

2）对于后续段拟合出的 Bezier 曲线，由式（3）可得

$$f(s,x_{P_2},y_{P_2}) = \alpha\sum_{i=0}^{n}[x_{Q_i} - f_0(t_i)\cdot x_{P_0} - f_1(t_i)\cdot s\cdot x_G + f_2(t_i)\cdot x_{P_2} + f_3(t_i)\cdot x_{P_3}]^2 + \alpha\sum_{i=0}^{n}[y_{Q_i} - f_0(t_i)\cdot y_{P_0} - f_1(t_i)\cdot s\cdot y_G + f_2(t_i)\cdot y_{P_2} + f_3(t_i)\cdot y_{P_3}]^2 + \beta\sum_{i=0}^{n}[x_{P''(t_i)}]^2 + \beta\sum_{i=0}^{n}[y_{P''(t_i)}]^2 \quad (7)$$

为方便计算，令 $\alpha + \beta = 1$。在实际计算中，标量 s 可能出现负值，此时计算出来的向量 $\boldsymbol{P}$ 的方向与方向向量 $\boldsymbol{G}$ 的方向相反。为了避免此情况的出现，在实际计算中当 s 出现负值时，认为此次拟合不成功，继续下一次拟合。分别按上文所提到的方法对式（6）或式（7）作最小二乘拟合即可。

四、实　例

上文给出了折线转分段 Bezier 曲线的改进算法，该算法已经在笔者所在单位自主开发的绘图软件 Gisway 中得到应用，并且效果良好。下面针对原

始算法和改进算法在拟合同样的数据点时给出具体的例子，同时比较不同精度下的拟合效果，并对 α、β 的不同取值对拟合效果的影响作出讨论。

1. 原始算法和改进算法的比较

从图 3 ~ 图 5 中可以看到，在取拟合精度为 5 (点) 的情况下，原始算法在矩形框标出的位置处有明显的扰动，这样使得拟合出来的曲线在整体上光顺度较差。而改进算法取扰动系数 β 为 0.002 的情况下，拟合出来的曲线很好地控制了在原始算法中出现的扰动，使得曲线平滑、连续。同时，在原始曲线为 100 个节点的情况下，原始算法拟合出来有 16 个节点，改进算法为 20 个节点，在保证精度的情况下，两种算法都对折线实现了 40% ~ 60% 的压缩，满足了生产需求。

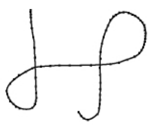
图 3 原始折线

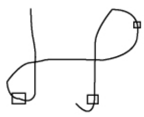
图 4 原始算法

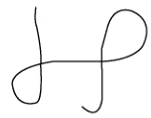
图 5 改进算法

2. 拟合精度的不同取值对拟合效果的影响

从图 6 ~ 图 7 可知，在 $\beta = 0.002$ 的情况下，可以看到拟合精度的取值越小，拟合出来的曲线节点数越多。随着取值的增大，拟合出来的曲线的节点数减少，幅度开始变缓，如表 1 所示。用户可以根据自己的需求来选择合适的拟合精度。根据试验，通常情况下，拟合精度的取值在 5 ~ 10 点之间可以在保证精度和压缩比的情况下达到较好的拟合效果。


图 6 拟合精度 2(点)，节点数 33

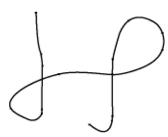
图 7 拟合精度 12(点)，节点数 15

表 1 拟合精度对拟合曲线节点数的影响

拟合精度/点	0	2	3	4	5	8	10	12
节点数/个	100	33	27	22	20	18	17	15

3. α、β 的不同取值对拟合效果的影响

从图 8 ~ 图 10 中可以看到，随着 β 取值的逐渐增大，光顺权在算法中的权重变大，拟合出来的曲线曲率更趋于平缓，而当 β 取值继续增大时，拟合算法中的偏移因子的权重越来越小，此时会产生更多的节点数，曲线的光顺度却没有明显的变化。

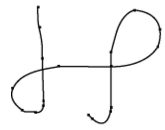
图 8 $\beta = 0.0005$

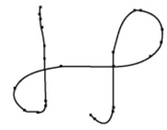
图 9 $\beta = 0.005$

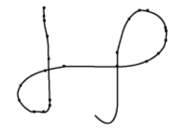
图 10 $\beta = 0.05$

4. 在 Gisway 中的应用

Gisway 软件是本单位根据生产实践需要而研发的一套兼有 GIS 功能和地图制图功能的绘图系统。图 11、图 12 展示了基于该算法开发的“折线转曲线 Bezier”功能在实际生产中的应用效果。图 11 为原始离散点组成的铁路，节点密，光顺度差；而通过 Bezier 曲线拟合后的铁路线，如图 12 所示光顺度高，同时也保证了折线原始的形状特征。

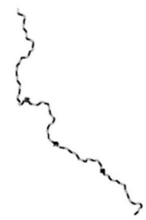
图 11 离散点铁路

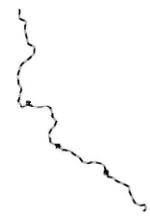
图 12 Bezier 拟合铁路

五、结束语

本文提出一种改进的 Bezier 拟合算法，引入 α 约束条件控制曲线的偏移量即拟合精度，引入 β 约束条件控制曲线的形状即光顺性。大量试验数据表明，该算法能够有效地控制拟合曲线的光顺度并消除抖动，尤其是原始曲线包含尖点和直角折线时。同时，试验还表明，在某些情况下，光顺权对拟合曲线的光顺性有较大贡献，在有些情况下则贡献不大，这与原始折线的形状和 β 的取值有关。改进算法在实际应用中，通过设定适合的权因子和拟合精度，可以使拟合出来的 Bezier 曲线曲率变化小且均匀，达到一定的逼近性要求，满足实际生产需求。

参考文献：

[1] 张红祥，车鹏飞. 一种多段 Bezier 曲线光顺拟合方法[J]. 科技信息，2008(13)：48-49.

[2] 罗卫兰，杨勋林，郑建民. B 样条曲线的约束光顺算法[J]. 浙江大学学报：理学版，2004，31(1)：51-57.

[3] 蒋大为，李安平. B 样条曲线的最小二乘保形光顺逼近[J]. 工程数学学报，2002，17(1)：125-128.

[4] 穆国旺，宋秀琴，臧婷. 一种选点法和能量法相结合的曲线光顺方法[J]. 工程图学学报，2005(6)：118-121.

[5] 王家纯，申鸿烨. Bezier 曲线反求参数算法的研究[J]. 控制工程，2007，14(5)：76-80.