

# 基于椭球膨胀法实现独立坐标系统的建立

于亚杰 赵英志 张月华

(河北省第二测绘院, 河北 石家庄 050031)

## The Establishment of Independent Coordinate System Based on the Ellipsoid Expansion Method

YU Yajie, ZHAO Yingzhi, ZHANG Yuehua

**摘要:** 针对平面控制测量投影变形的两个主要因素以及它们之间的关系, 阐述建立独立坐标系的方法, 介绍投影面变换方法中的椭球膨胀法。同时结合实际工程项目, 介绍通过 TGO 软件利用上述方法建立地方独立坐标系统的操作步骤。

**关键词:** 独立坐标系; 坐标系统管理器; 椭球膨胀法; 当地点设置; 投影面变换; TGO

### 一、引言

在工程测量和城市测量中, 由于作业区域可能位于投影带的边缘, 并且测区平均高程还可能与国家大地基准的参考椭球面有较大差距, 为了控制长度变形  $\leq 2.5 \text{ cm/km}^{[1]}$ , 就需要建立地方独立坐标系。利用高程归化和高斯投影对于控制网边长的影响具有前者缩短和后者延长的特点, 如果两者不能完全抵偿而允许有一个残余的差数  $V_s$ , 则其相对差数为

$$\frac{V_s}{S} = \frac{y_m^2}{2R^2} - \frac{H_m}{R} \quad (1)$$

由式(1)可知, 由于高程归化投影变形与高斯投影变形符号相反, 所以在一定的区域内, 两种变形可以相互抵偿, 这就需要采用一种行之有效的办法, 即建立独立坐标系。

### 二、独立坐标系的建立方法

一般的, 根据式(1)的计算, 当  $y_m$  值不小于 45 km 或  $H_m$  在 160 m 以下时, 投影变形值小于 2.5 cm/km。对于投影变形超限的测区, 根据地理位置和平均高程独立坐标系的建立方法一般有 3 种: 选择合适的中央子午线(即改变  $y_m$  以抵偿由高程面的边长归算到参考椭球面上的投影变形), 选择合适的投影面(即改变  $H_m$  以抵偿由高程归化引起的变形)和两者均选定。建立地方独立坐标系有 3 个必要参数: 中央子午线、投影面及地方坐标系参考椭球。通过对地方坐标系参考椭球几何元素、定

位及定向的确定, 使得椭球面与投影面拟合最好, 这样投影变形可以减到最小, 同时要求便于与国家坐标系进行换算。

### 三、投影面变换的方法——椭球膨胀法

椭球膨胀法的基本思想是保持参考椭球的定位和定向不变, 对椭球进行缩放, 使得经过缩放之后的参考椭球的椭球面与独立坐标系所选定的平面相切, 在切点处, 两椭球的法线重合。要满足上述缩放条件, 新椭球的长半轴  $a_1$  和扁率  $\alpha_1$  分别为<sup>[2]</sup>

$$a_1 = \frac{N + H}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (2)$$

$$\alpha_1 = e \sqrt{\frac{N}{N + H}} \quad (3)$$

式(2)、式(3)中  $N$  为卯酉圈曲率半径;  $B$  为大地纬度;  $H$  为投影面大地高;  $e$  为原椭球的第一偏心率。通常, 采用膨胀后椭球与原椭球的中心保持不变, 方向保持不变, 椭球扁率保持不变(即  $da = 0$ )。这种观点易于实现, 而且能保证成果精度满足要求。椭球膨胀法有多种方法实现不同投影面的坐标转换, 在工程实践中多采用如下 3 种方法<sup>[3-4]</sup>:

1) 椭球长半径的改正量为投影面大地高  $H$  ( $da = H$ )。

2) 投影面的大地高  $H$  等于卯酉曲率半径  $N$  的变化量 ( $\Delta N = H$ ), 又由

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (4)$$

得出

$$da = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \cdot \Delta N = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \cdot H \quad (5)$$

3) 以基点上参考椭球的平均曲率半径的变化值求出椭球长半径的改正值。设  $R_0$  为测区中心在国家参考椭球下的平均曲率半径,  $R'_0$  为独立椭球下的平均曲率半径, 又根据平均曲率半径公式

$$R = \sqrt{MN} = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{W^2} \quad (6)$$

得到

$$R'_0 = R_0 + H = a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 B} + H \quad (7)$$

即

$$da = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot H \quad (8)$$

### 四、换算方法

由莫洛金斯基公式可求得国家控制点的大地坐标系转换到独立坐标系中的计算公式为<sup>[5]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \Delta L &= 0 \\ \Delta B &= \frac{e^2 \sin B \cos B}{(M + N) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \cdot da \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中,

表1 起算点国家坐标系成果表(1980 西安坐标系, 中央子午线 117°)

点名	平面直角坐标/m			国家参考椭球大地坐标/(° ′ ″)	
	X	Y	1985 国家高程	B	L
IV01	...18 342.025	...3 206.896	289.997	40 47 35.926 74	118 13 22.270 67
IV02	...17 686.927	...3 345.684	319.035	40 47 14.631 95	118 13 27.799 28
IV03	...17 486.787	...1 908.552	286.902	40 47 08.791 08	118 12 26.399 69
IV04	...16 565.966	...0 473.530	282.117	40 46 39.582 24	118 11 24.675 84

1)  $a_1 = a + H$ , 得到独立参考椭球长半轴为 6 378 457 m。过程如下:

打开 TGO 坐标系系统管理器, 新建地方独立坐标系 DF1-118.30, 即椭球长半轴为 6 378 457 m, 扁率不变, 中央子午线设置为 118°30′, 中心纬度为 0,

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B})^3} \quad (10)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (11)$$

其中  $M$  为国家参考椭球子午曲率半径。由此实现椭球膨胀法的算法流程为: 首先确定项目中心区域的  $B$  和  $L$ ; 其次确定高程异常  $\zeta$ , 与投影高程面的正常高相加, 进而确定投影面的大地高  $H$ ; 然后再将投影面大地高按上述 3 种方法的其中一个进行计算, 得到地方参考椭球的长半径  $a$ , 将已知控制点在国家坐标系下的平面坐标进行高斯反算得到其大地坐标; 由式(9) 计算  $\Delta B$ , 从而得到在地方独立坐标系中的大地坐标; 最后根据地方参考椭球的椭球参数, 进行高斯投影正算。

### 五、采用 TGO 软件实现独立坐标系的建立

某山区平均纬度为 40°47′, 测区平均高程为 300 m, 平均高程异常为 17 m。测区已有 1980 西安坐标系 (117°) 起算点 4 个。现以中央子午线 118°30′、测区平均纬度及平均高程面建立地方独立坐标系。控制网中起算点成果如表 1 所示。

纵轴加常数为 0 横轴加常数为 500 000, 尺度比为 1。然后打开国家坐标系二维约束平差控制网项目, 将坐标系系统改变为 DF1-118.30, 此时, 各点的平面成果已是该地方独立坐标系下的坐标值。各起算点地方独立坐标系成果如表 2 所示。

表2 独立坐标系成果(椭球长半径改正量为投影面大地高  $a_1 = 6\ 378\ 457\ m$ )

点名	地方椭球平面直角坐标/m		地方椭球大地坐标/(° ′ ″)	
	X	Y	B	L
IV01	...17 884.954	...6 608.310	40 47 35.960 81	118 13 22.270 67
IV02	...17 227.627	...6 735.864	40 47 14.666 02	118 13 27.799 28
IV03	...17 052.107	...5 295.624	40 47 08.825 15	118 12 26.399 69
IV04	...16 156.022	...3 845.165	40 46 39.616 31	118 11 24.675 84

2) 投影面的大地高  $H$  等于卯酉曲率半径  $N$  的变化量。计算公式通过 VB 或 Excel 可轻松实现, 以 Excel 为例, 计算情况如表 3 所示。

表 3 椭球膨胀法 2 中曲率半径变化量的计算过程

测区平均纬度 $B$	$\sin B$	测区中心纬度正弦值的平方 $\sin^2 B$	长半径 $a$	第一偏心率的平方 $e^2$	测区高出参考椭球面大地高 $H$	$\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$	测区中心卯酉圈曲率半径 $N$	$da$	$a_1$
40.47	0.652 980 1	0.426 383	6 378 140	0.006 694 384 999 59	317	0.998 571 794	6 387 262.3	316.547	6 378 456.547

可知独立参考椭球长半轴为 6 378 456.547 m。设置及操作方法同方法 1)。各起算点按方法 2) 计算出的独立坐标系成果如表 4 所示。打开 TGO 坐标系管理器, 新建地方独立坐标系 DF2-118.30 椭球长半轴为 6 378 456.547 m, 其余项

表 4 独立坐标系成果(投影面的大地高  $H$  等于卯酉曲率半径  $N$  的变化量  $a_1 = 6\ 378\ 456.547\ m$ )

点名	地方椭球平面直角坐标/m		地方椭球大地坐标/(° ′ ″)	
	$X$	$Y$	$B$	$L$
IV01	...17 884.631	...6 608.312	40 47 35.960 76	118 13 22.270 67
IV02	...17 227.305	...6 735.866	40 47 14.665 97	118 13 27.799 28
IV03	...17 051.785	...5 295.626	40 47 08.825 10	118 12 26.399 69
IV04	...16 155.699	...3 845.167	40 46 39.616 27	118 11 24.675 84

3) 以基点上参考椭球的平均曲率半径的变化膨胀法 3) 计算的计算过程如表 5 所示。值求出椭球长半径的改正值, 利用 Excel 进行椭球

表 5 椭球膨胀法 3 的计算过程

测区平均纬度 $B$	测区中心纬度正弦值 $\sin B$	测区中心纬度正弦值的平方 $\sin^2 B$	长半径 $a$	第一偏心率的平方 $e^2$	测区高出参考椭球面大地高 $H$	$da$	$a_1$
40.47	0.652 98	0.426 383	6 378 140	0.006 694 384 999 590	317	317.159	6 378 457.159

可知独立参考椭球长半轴为 6 378 457.159 m。设置及操作方法同方法 1)、方法 2)。可得各起算点按方法 3) 计算出的独立坐标系成果如表 6 所示。打开 TGO 坐标系管理器, 新建地方独立坐标系 DF3-118.30 椭球长半轴为 6 378 457.159 m, 其余项

表 6 独立坐标系成果

点名	地方椭球平面直角坐标/m		地方椭球大地坐标/(° ′ ″)	
	$X$	$Y$	$B$	$L$
IV01	...17 885.067	...6 608.310	40 47 35.960 83	118 13 22.270 67
IV02	...17 227.740	...6 735.863	40 47 14.666 04	118 13 27.799 28
IV03	...17 052.220	...5 295.624	40 47 08.825 17	118 12 26.399 69
IV04	...16 156.135	...3 845.164	40 46 39.616 33	118 11 24.675 84

4) 通过 TGO 中的当地点设置来实现。以椭球膨胀法 3 为例新建项目, 将项目属性由默认改为 1980 西安坐标系(XIAN80-117) 然后点击当地点设置, 如图 1 所示。

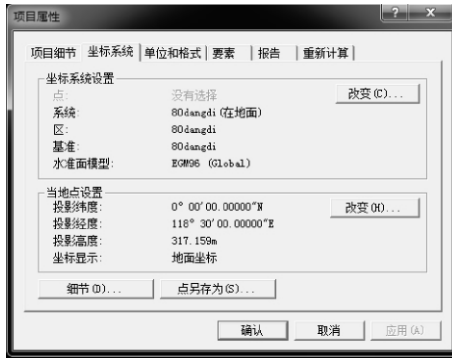


图1 当地点设置界面

表7 独立坐标成果(采用当地点设置并基于方法3)的地方椭球  $a_1 = 6\ 378\ 457.159\ \text{m}$

点名	平面直角坐标/m		地方椭球大地坐标/(° ′ ″)	
	X	Y	B	L
IV01	...17 885.067	...6 608.310	40 47 35.960 83	118 13 22.270 67
IV02	...17 227.740	...6 735.863	40 47 14.666 04	118 13 27.799 28
IV03	...17 052.220	...5 295.624	40 47 08.825 17	118 12 26.399 69
IV04	...16 156.135	...3 845.164	40 46 39.616 33	118 11 24.675 84

## 六、结论

1) 椭球膨胀法其实是不同基准间的转换,虽然投影时的椭球参数与国家参考椭球的参数有所差异,但经投影后所得平面坐标在数值上与国家参考椭球的椭球面上的平面指标接近,两者有着较严密的换算关系,易实现转换。 $\Delta B$ 与 $da$ 有关,采用3种方法计算 $da$ 会有3种不同值,则 $\Delta B$ 亦有3种成果,每一种椭球膨胀法采用上述的两种计算方式所得结果是一致的。3种椭球膨胀法计算的坐标值虽然不同,但在坐标间的相对关系上是基本一致的。

2) 在建立独立坐标系统时,投影带和投影面的选择尤为重要。对于平坦的测区,距国家 $3^\circ$ 带中央子午线小于45 km的测区,投影面一般可选平均高程面;否则应选取抵偿高程面。如果测区高程起伏较大,可通过变换中央子午线位置与投影面高程来实现,或是分带计算(多见于线状工程测量)。

3) 通过对TGO中的坐标管理器及当地点设置

高度为317.159 m,即椭球长半轴变化量(根据选择膨胀法不同,数值不同),选择使用地面坐标和用投影位置计算比例尺选项。将表6中的地方椭球大地坐标导入到项目中,得到的网格坐标即为独立坐标系平面坐标,如表7所示。

可见,方法4)与方法3)的结果一致。对控制网进行无约束平差后,以表7坐标为起算数据,在该独立坐标系的基准下进行平差计算,就得到了控制网独立坐标系成果。

的操作,可以很好地解决投影面坐标转换问题,更方便建立独立坐标系统。

## 参考文献:

- [1] 李征航,黄劲松. GPS测量与数据处理[M]. 武汉:武汉大学出版社,2007.
- [2] 北京市测绘设计研究院. CJJ 8—99 城市测量规范[S]. 北京:中国建筑工业出版社,1999.
- [3] 施一民. 现代大地控制测量[M]. 北京:测绘出版社,2003.
- [4] 施一民. 建立区域坐标系问题的我见[J]. 测绘工程,2000,9(1):38-41.
- [5] 冯林刚. GPS测量控制网纳入独立坐标系的方法[J]. 地矿测绘,2000,16(3):6-8.
- [6] 邱云峰,倪津. 不同投影归算面间的坐标换算[J]. 测绘通报,2001(9):12-13.
- [7] 畅开狮. 建立城市独立坐标系相关问题的探讨[J]. 城市勘测,2008(1):86-90.

(上接第21页)

距法那样只能监测两个点之间的相对水平位移。

## 参考文献:

- [1] 韩焯,李宁. 隧道开挖不均匀收敛引起地层位移的预测模型[J]. 岩土工程学报,2007,29(3):347-352.
- [2] 李玉宝,杨丽. 收敛计检验与精度分析[J]. 测绘通

报,2009(3):45-48.

- [3] 彭建国,田爱军,张希庆. 基于全站仪ATR的隧道围岩收敛测量系统[J]. 铁道勘察,2007,33(1):27-30.
- [4] 李冠军,王玉洁. 隧道断面的收敛监测方法[J]. 大坝与安全,2003(5):26-28.
- [5] 武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础[M]. 武汉:武汉大学出版社,2003.