文章编号：0494-0911(2011)11-0015-03　　**中图分类号**：P207.2　　**文献标识码**：B

基于非线性模型高精度参数估计的新解算方法

宁　伟[1,3]，宁亚飞[2]，欧吉坤[3]，周　立[1]

(1. 淮海工学院 测绘工程学院，江苏 连云港 222005；2. 中国地质大学 信息工程学院，湖北 武汉 430074；
3. 中国科学院 测量与地球物理研究所，湖北 武汉 430077)

High-precision Estimation of Parameters Based on Nonlinear Model

NING Wei，NING Yafei，OU Jikun，ZHOU Li

摘要：在对传统求解非线性模型参数的思想进行分析和研究的基础上，提出一种利用多平差方法对待估参数进行相互迭代，以求得参数估值的新算法。通过实例说明该算法在解算精度和收敛速度方面优于传统解算方法。

关键词：最小二乘法；非线性模型；迭代法；精度

一、引　言

对于测量平差中大量的非线性模型，经典平差总是直接进行线性近似，这对于测量精度要求不高，线性近似所引起的模型误差小于观测误差的情况是可行的。随着科学技术的不断发展，特别是测绘仪器精密度的不断提高，线性近似导致的模型误差逐渐与测量误差相当，有时甚至大于观测误差。这时，再利用线性近似方法，显然是不合理的，也难以满足当今科学技术要求的数据精度。对此，国内外许多专家和学者进行了大量而深入的研究，并取得一些有益的成果[1-4]。综观这些成果，大体可分为两类：当模型的非线性化程度较弱时，可考虑采用较为熟悉的线性近似法；当模型的非线性化程度较高时，则考虑采用迭代方法，如牛顿法、信赖域法等。本文通过积极的分析、探索和研究，提出了一种全新的算法，并且通过实例和上述两类方法进行比较，说明本算法具有对起算数据精度要求较低、解算精度高、收敛快等优点。

二、条件平差求解参数思想的提出

1. 改进传统间接平差使用方法

假设需要对线性模型 $Z = 180 - aX - bY$ 中的未知参数 a，b 进行最优估计。在 X，Y 每次都已知的情况下，可以对变量 Z 进行等精度独立观测，共进行了 4 次，试验数据如表 1 所示。

若将前两次视为一个观测组，后两次视为一个观测组，通过对 X、Y 进行观察，笔者发现 X、Y 都具有对称性，可以提前得出结论：$a = b = 1$。显然，解算结果越接近这个值，准确度越高，对此，给出下面两种解法。

表 1　已知数据和观测数据

观测期数	X	Y	Z
1	60	40	79
2	40	60	81
3	90	60	31
4	60	90	29

(1) 常规解法

按间接平差列误差方程

$$\left.\begin{aligned}\delta Z_1 &= 101 - 60X_1 - 40Y_1\\ \delta Z_2 &= 99 - 40X_2 - 60Y_2\\ \delta Z_3 &= 149 - 90X_3 - 60Y_3\\ \delta Z_4 &= 151 - 60X_4 - 90Y_4\end{aligned}\right\},\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -60 & -40\\ -40 & -60\\ -90 & -60\\ -60 & -90\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} -101\\ -99\\ -149\\ -151\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$$

根据

$$\hat{X} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$$

容易解得

$$\hat{a} = 1.007\,7,\quad \hat{b} = 0.992\,8$$

(2) 新解法

此解法的基本思想是：在观测模型已知的情况下，可依据每次的观测值分别假定出此时的最佳参数估值。显然，不同情况下参数的估值肯定存在差异，再按照某种最优法则(即最小二乘法)找到一个

收稿日期：2010-12-21
基金项目：国家自然科学基金资助项目(40474009，40674012)；江苏淮海工学院自然科学基金资助项目(KQ10115)
作者简介：宁　伟(1964—)，男，山东宁阳人，教授，主要研究方向为现代测量数据处理理论及应用。

统一的参数估值作为待估参数的最优解。具体步骤可归纳为:

1) 设每次观测时的参数改正数为未知数,列条件方程

$$\underset{n,m}{\boldsymbol{A}}\ \underset{m,1}{\boldsymbol{V}}+\underset{n,1}{\boldsymbol{w}}=\underset{n,1}{\boldsymbol{0}}$$

式中,n 为观测次数; m 为改正数个数。这里假定各参数间相互独立,因此 $Q=P^{-1}$ 为对角阵,Q 的阶数为待求参数的个数与观测次数的乘积。

2) 依据条件平差原理求解改正数,得每一次观测时参数的最佳估值。

3) 待求的参数估值即为每次观测时参数估值的加权平均值。

依据这样的思想,本题的解算过程如下:

1) 首先假定每次观测时,参数近似值 a^0、b^0 的值都为 1,于是

$$\left.\begin{aligned}60\delta a_1+40\delta b_1-1=0\\40\delta a_2+60\delta b_2+1=0\\90\delta a_3+60\delta b_3+1=0\\60\delta a_4+90\delta b_4-1=0\end{aligned}\right\},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}60&0&0&0&40&0&0&0\\0&40&0&0&0&60&0&0\\0&0&90&0&0&0&60&0\\0&0&0&60&0&0&0&90\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \underset{8\times 8}{\boldsymbol{P}}=\underset{8\times 8}{\boldsymbol{I}}$$

2) 求解每次观测时,参数近似值的改正数

$(\delta a_1,\delta a_2,\delta a_3,\delta a_4)=(6/520,-4/520,-9/1\,170,6/1\,170)$

$(\delta b_1,\delta b_2,\delta b_3,\delta b_4)=(4/520,-6/520,-6/1\,170,9/1\,170)$

3) 计算每次观测时,参数估值的加权平均

$\hat{a}=a^0+(1\cdot\delta a_1+1\cdot\delta a_2+1\cdot\delta a_3+1\cdot\delta a_4)/(1+1+1+1)=1.001\,282$

$\hat{b}=b^0+(1\cdot\delta b_1+1\cdot\delta b_2+1\cdot\delta b_3+1\cdot\delta b_4)/(1+1+1+1)=0.999\,871\,8$

2. 算法精度比较

算法精度(都取 5 位有效数字) 比较如表 2 所示。

表 2 算法精度比较

	$\hat{a}$	$\hat{b}$
常规算法	1.007 7	0.992 8
新算法	1.001 2	0.999 8

从表 2 可以看出,新算法比原间接平差法在精度上有很大提高。

三、迭代法求解非线性模型参数

1. 新算法的提出

该算法依据条件平差和间接平差反复迭代未知参数,以此来求得参数的最优估计。具体步骤如下:

1) 设每次观测时的参数改正数为未知数,列条件方程

$$\underset{n,m}{\boldsymbol{A}}\ \underset{m,1}{\boldsymbol{V}}+\underset{n,1}{\boldsymbol{w}}=\underset{n,1}{\boldsymbol{0}}$$

式中,n 为观测次数; m 为改正数个数。假定各参数间相互独立,$Q=P^{-1}$ 为对角阵,其阶数为待求参数的个数与观测次数的乘积。

2) 求解每次观测时的参数改正数,经过条件平差后得到每一次的最佳参数估值。

3) 求解此时的参数平差值 $\hat{x}_{(1)}$,此时 $\hat{x}_{(1)}$ 为所有最佳参数估值的加权平均值。

4) 将步骤 3) 得到的 $\hat{x}_{(1)}$ 作为参数的近似值,按照间接平差模型列误差方程

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{l}$$

5) 利用间接平差原理求解此时的 $\hat{x}_{(2)}$(注意,此时的权阵不同于步骤 1) 中的权阵,此时的协因数阵是观测值之间的协因数阵,具体的协因数确定方法和一般的间接平差协因数确定的方法相同)。

6) 比较 $\hat{x}_{(1)}$ 和 $\hat{x}_{(2)}$。对于事先给定的很小正数 ε,若 $\|\hat{x}_{(2)}-\hat{x}_{(1)}\|<\varepsilon$,则取 $\hat{x}=\hat{x}_{(2)}$;否则,令 $x_0=\hat{x}_{(2)}$,返回步骤 1)。反复继续迭代,直到前后两次平差后的数值差别很小为止。

算法说明:本算法中步骤 2)、3) 和 5) 分别运用了最小二乘原理,即一次迭代,利用了 3 次最小二乘原理[5]。和以往算法相比较,收敛速度和精度自然会得到明显提高。当然,这只是理论上的结果,其实际效果如何,从下面的算例中可以得到诠释。

2. 算例解析[6]

已知非线性模型为 $L_i=x_1\mathrm{e}^{ix_2}$,其中参数 (x_1,x_2) 的真值为 (5.420 136 187,−0.254 361 89)。L_i 的 5 个真值和相应的 5 个同精度独立观测值,如表 3 所示。

表 3 5 个观测值及其真值

i	1	2	3	4	5
真值	4.203 834	3.258 924	2.527 006	1.959 469	1.519 394
观测值	4.2	3.25	2.52	1.95	1.51

这里假设 (x_1,x_2) 的近似值分别为 (5.40,−0.3)。

1) 根据已知的参数近似值,先对非线性模型线性化,列出条件方程

$$L_i = x_1 e^{ix_2} + e^{ix_2}\delta x_1^{(i)} + ix_1 e^{ix_2}\delta x_2^{(i)} \quad (i = 1,2,3,4,5)$$

将 x_1, x_2 的近似值代入上式,得到

$$A = \begin{bmatrix} 0.7408 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5488 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.9271 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4066 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.5864 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3012 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.5058 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2231 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.0245 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0.1996 \\ 0.2864 \\ 0.3245 \\ 0.3239 \\ 0.3051 \end{bmatrix}$$

$P = I$。解得

$$\left.\begin{matrix} \delta x_1^1 = 0.00893 \\ \delta x_1^2 = 0.00443 \\ \delta x_1^3 = 0.00303 \\ \delta x_1^4 = 0.0023 \\ \delta x_1^5 = 0.00187 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} \delta x_2^1 = 0.04824 \\ \delta x_2^2 = 0.04789 \\ \delta x_2^3 = 0.04982 \\ \delta x_2^4 = 0.04964 \\ \delta x_2^5 = 0.0506 \end{matrix}\right\}$$

所以$(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (5.404114, 0.25091)$。

2) 利用间接平差,列误差方程

$$v_i = x_1 e^{ix_2} + e^{ix_2}\delta x_1 + ix_1 e^{ix_2}\delta x_2 - l_i$$

将 1) 求得的$(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ 代入方程中得

$$B = \begin{bmatrix} 0.7781 & 4.2049 \\ 0.60543 & 6.5436 \\ 0.4711 & 7.6373 \\ 0.3665 & 7.92336 \\ 0.2853 & 7.7064 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0.00494 \\ 0.0218 \\ 0.02588 \\ 0.03061 \\ 0.031 \end{bmatrix},$$

解得

$$(\delta \hat{x}_1^{(1)}, \delta \hat{x}_2^{(1)}) = (0.02027, -0.00484)$$

因此$(\hat{x}_1^{(1)}, \hat{x}_2^{(1)}) = (5.424384, -0.25575)$。

3) 用同样的方法进行第二次迭代

由条件平差解得

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (5.424384, -0.25567)$$

代入间接平差后解得的第二次迭代的最终结果为

$$(\hat{x}_1^{(2)}, \hat{x}_2^{(2)}) = (5.423739, -0.2555)$$

将本文算法与常见算法进行比较,结果如表 4 所示。

由表 4 可以看出,新算法的迭代精度远远超出了一般的间接平差法。在同牛顿迭代法的比较中,新算法第一次的平差值介于牛顿法的第 4 次至第 5 次的最佳估值之间,第 2 次的迭代结果同牛顿法的最终结果相差不大。由此可以看出,本算法具有收敛速度快、解算精度高、对起算数据精度要求不太高等优点。

表 4 各种算法比较

迭代次数	参数							
	间接平差法		牛顿迭代法		新算法		真值	
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
1	5.394 14	−0.250 2	5.333 01	−0.253 9	5.424 38	−0.255 75	5.420 136	−0.254 362
2			5.417 2	−0.254 3	5.423 74	−0.255 51		
3			5.422 71	−0.255 7				
4			5.442 74	−0.255 7				
5			5.422 74	−0.255 7				
6			5.422 74	−0.255 7				

四、结束语

本文借用传统的条件平差和间接平差原理,构造出求解一类非线性模型参数估计的新方法。对于非线性程度较强、参数初值精度较低的情况,利用该算法可较快获得精度较高的参数估值。文中的算例不仅表明本算法优于传统算法,而且为非线性模型参数估计提供了一种新的思路。

参考文献:

[1] 张松林,王新洲. 非线性模型的一种半参数估计方法[J]. 测绘通报,2004(11):26-28.
[2] 陶本藻. 关于测量中非线性模型估计问题[J]. 测绘通报,1998(2):6-8.
[3] 田玉刚,王新洲,花向红. 非线性最小二乘估计的遗传算法[J]. 测绘工程,2004,13(4):6-8.
[4] 王新洲. 非线性模型参数估计理论及应用[M]. 武汉:武汉大学出版社,2002.
[5] 武汉大学测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础[M]. 武汉:武汉大学出版社,2007.
[6] 王新洲,陶本藻. 高等测量平差[M]. 北京:测绘出版社,2006.