文章编号: 0494-0911(2011) 11-0001-04 中图分类号: P22 文献标识码: B

组建地球参考架中基准约束的选择及其影响

马高峰,柴洪洲,刘长建,马国强
(信息工程大学 测绘学院,河南 郑州 450052)

Selectivity and Influence of Datum Constraints Used in Combination of TRFs

MA Gaofeng, CHAI Hongzhou, LIU Changjian, MA Guoqiang

摘要: 根据约束形式和提供信息的情况,将定义几何坐标参考基准的约束条件分为统计约束和函数模型约束,并给出它们的统一表示形式。解释统计约束中的紧约束、皱约束和松约束的分类依据和使用原则,分析伪逆约束和最小约束的表示形式、使用方法和应用范围。指出固定约束是函数模型约束的一种,它是定义几何坐标参考基准的理想选择,讨论在 IERS 组建 ITRF2008 时,用于定义相似变换参数相对参考基准的函数模型约束的表示形式。

关键词: 地球参考架(TRF) ; 基准约束; 随机约束; 函数模型约束; 大地参考基准

一、引 言

建立地球参考架的几何观测量仅能敏感由地面参考点构成的三维几何构形,而由相似变换模型可知,由三维几何坐标描述的地球参考架(TRF) 及其变化存在 14 个自由度,为了得到唯一的 TRF 坐标,需根据约束条件消去相应的自由度,即定义相应的坐标参考基准。约束条件的正确选择是保证 TRF 统一参考基准的前提。文献 [1-8] 均针对这一问题进行了较深入的讨论,它们所建立的代数约束侧重于其统计和代数意义,因此存在着各种各样的表示形式。目前在 TRF 的组建和应用中,这些约束形式得到了广泛的应用。文献 [9-10] 讨论了现代大地测量参考基准的基本概念和发展现状,而文献 [11] 则对建立地球参考架的基准性技术 VLBI 在数据分析时的约束形式进行了较深入的研究。

根据约束形式和附加信息的不同,本文将基准约束分为统计约束和函数模型约束两种,并将提供未知参数方差信息的基准约束称为统计约束,而将由未知参数之间的函数关系确定的基准约束称为函数模型约束。统计约束为平差系统提供了先验的统计信息,通常可将其作为虚拟观测量进行处理; 由未知参数间的确定函数关系表示的函数模型约束并不为平差系统提供先验统计信息,因此应作为条件方程进行处理。

二、统计约束

通常可将统计约束作为虚拟观测量处理,此时实际观测量 L 和虚拟观测量 L_f 对应的线性观测方程可表示为

$$\left.\begin{aligned} L &= AX, Q_L \\ L_f &= CX, Q_{L_f} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中,A、C 分别为列满秩的设计矩阵和行满秩的条件矩阵; Q_L、Q_{L_f} 分别为相应的先验协方差矩阵(或权逆阵) ; X 为待求的未知参数。利用最小二乘原理易给出 X 的最优线性无偏估计 $\hat{X}$ 如下 [12]

$$\hat{X} = (N + C^{\mathrm{T}} Q_{L_f}^{-1} C)^{-1} (U + C^{\mathrm{T}} Q_{L_f}^{-1} L_f) = \underline{\hat{X}_L - J(C\hat{X}_L - L_f)} \tag{2}$$

$$Q_{\hat{X}} = (N + C^{\mathrm{T}} Q_{L_f}^{-1} C)^{-1} = \underline{Q_{\hat{X}_L} - JCQ_{\hat{X}_L}} \tag{3}$$

式中,$N = A^{\mathrm{T}} Q_L^{-1} A$; $U = A^{\mathrm{T}} Q_L^{-1} L$; $J = Q_{\hat{X}_L} C^{\mathrm{T}} (Q_{L_f} + CQ_{\hat{X}_L} C^{\mathrm{T}})^{-1}$。

如果法矩阵的逆阵 N^{-1} 存在,则 $\hat{X}_L = N^{-1} U$,$Q_{\hat{X}_L} = N^{-1}$ 为不考虑约束条件的参数解,J 称为增益矩阵。应用中可取部分参数的先验均值 X_s^0 及其协方差矩阵 $Q_{X_s^0}$ 作为统计约束,这相当于 $L_f = X_s^0$,$C = I$ (I 为单位阵) 。未知参数先验的统计信息可能会破坏观测量中包含的基准信息,因此通常要求能够依据 SINEX 解文件中包含的约束信息 L_f、C、Q_{L_f} 和参数解 $\hat{X}$、$Q_{\hat{X}}$ 恢复未加约束的法方程 $N\hat{X} = U$,此时由式(2) 和式(3) 易知 [1]

$$\left.\begin{aligned} N &= Q_{\hat{X}}^{-1} - C^{\mathrm{T}} Q_{L_f}^{-1} C \\ U &= Q_{\hat{X}}^{-1} \hat{X} - C^{\mathrm{T}} Q_{L_f}^{-1} L_f \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

如果 X_s^0 取值为若干点位的坐标或速度,考虑到法方程的可恢复性,Altamimi 等人根据 X_s^0 的先验

收稿日期: 2011-02-21
基金项目: 国家测绘局测绘基础研究基金资助项目(10-01-08)
作者简介: 马高峰(1977—) ,男,陕西大荔人,博士生,讲师,主要研究方向为空间大地测量。

方差选取不同，将统计约束分为紧约束、皱约束和松约束(此处紧约束和松约束为直译，而为了避免歧义，本文暂且将 removable constraints 意译为皱约束)。如以 σ_p 表示点位的位置均方差，σ_v 表示点位的速度均方差，则紧约束要求 $\sigma_p \leqslant 10^{-10}$ m，$\sigma_v \leqslant 10^{-10}$ m/a；皱约束要求 $\sigma_p \approx 10^{-5}$ m，$\sigma_v \approx 10^{-5}$ m/a；松约束要求 $\sigma_p > 1$ m，$\sigma_v > 0.1$ m/a[13]。这些数值主要是依据历史观测数据通过数值试验得到的，仅适用于组建 TRF，对于其他应用，其数值可能会有所不同。

以上方差数值的选取也可这样理解：紧约束、皱约束和松约束对应的 $Q_{L_f}^{-1}$ 的量级分别为 10^{20}、10^{10}、10^{0}，由式(4)可知，紧约束、皱约束对 $L_f(X_s^0)$ 的不确定性极其敏感，而松约束对平差结果的影响则几乎仅由 L 的精度确定。考虑到通常的计算机双精度浮点数的有效位数为 16 位，此时紧约束会使舍入误差放大 10^4，而皱约束仅为舍入误差的 10^{-6}。由此可见，即使提供了先验约束信息，紧约束也是不可恢复的，舍入误差已将原有的部分法矩阵信息淹没，而皱约束则恢复精度很高。考虑皱约束的先验均方差仅为 ±0.01 mm，因此在当前的坐标精度下，可认为附加皱约束和紧约束得到的平差结果是相同的，为了方便后续的联合平差，通常不采用紧约束。

法方程附加不同的统计约束得到的未知参数的方差是不同的，可以找到一种使未知参数方差最小的统计约束，称为伪逆约束。

1. 伪逆约束

式(1)中，如果取 $L_f = CX^0$，并将 L_f 看做是等权(先验统计信息)的虚拟观测量，其中，X^0 为 X 的先验值，行满秩的设计矩阵 C 满足条件 $AC^{\mathrm{T}} = 0$。可以证明，上述约束解等价于 $\hat{X}^{\mathrm{T}}\hat{X} = \min$ 的最小范数解，也等价于未加约束的伪逆解，设计矩阵 C 可针对具体平差系统所缺失的基准信息构造[7-8]。秩亏的法矩阵 N 存在无穷多个广义逆 N^-，而伪逆 N^+ 即是满足其迹最小的一个，由此得到的参数估值满足 $\hat{X}^{\mathrm{T}}\hat{X} = \min$。可见伪逆解具有最小方差的性质，它在解决法矩阵秩亏的基础上更好地保护了观测几何构形信息，可将这类统计约束称为伪逆约束[3]。事实上，矩阵 C 行满秩且 $AC^{\mathrm{T}} = 0$ 说明矩阵 C 的行向量张成了矩阵 A 的零空间，虚拟观测方程(约束条件) $CX^0 = CX$ 使 $\hat{X}$ 垂直于矩阵 A 的零空间，从而得到最小范数解。也可选取具有可靠质量的部分参数近似值 X_s^0 组成与 $\hat{X}_s^{\mathrm{T}}\hat{X}_s = \min$ 等价的伪逆约束条件，通常也将附加这类约束的平差解称为拟稳解[7-8]。

在伪逆约束中，亦可考虑先验坐标 X^0 或 X_s^0 的相对精度信息，从而得到加权伪逆解和加权拟稳解。伪逆解的最小方差性质可更好地保护几何观测量所组成的几何构形信息，因此在变形观测中得到了广泛的应用，但是其所依据的参考基准是由 CX^0 或 $C_sX_s^0$ 定义的，因此有时也将其称为内部基准。X^0 或 X_s^0 的不确定性或不一致性将使平差结果无法直接比对，特别是伪逆解的协方差矩阵 N^+ 降秩，将导致以伪逆解作为间接观测量时无法构造其权矩阵，因此在组建 TRF 时一般不采用伪逆约束。

2. 最小约束

引入独立约束条件的数目等于法矩阵秩亏数的基准约束均可称为最小约束，具有最小方差性质的伪逆约束可作为最小约束的理想实现[3]。伪逆约束利用未知参数先验坐标的统计信息定义了平差系统缺失的基准信息，然而协议地球参考系(ITRS)约定的参考基准是与相似变换参数相对应的，为使平差结果基于 ITRS 协议约定的统一参考基准，应由相似变换参数构造统计约束条件以补充或增强观测量中缺少的特定基准信息。基于此，Sillard等提出了一种新的构造设计矩阵 C 的方法，它不仅可满足最小约束条件，其参数解的协方差矩阵也是可逆的，且具有近似的最小方差性[3-4]，本文中所述的最小约束特指这种最小约束。

假设一组空间几何点在两个三维笛卡尔直角坐标系中的几何坐标分别为 Y_R 和 Y_c，它们之间的相似变换参数记为 Θ，此时由相似变换模型可得到由 Y_R 和 Y_c 求解 Θ 的线性观测方程如下[2-4]

$$\left.\begin{aligned} L &= G\Theta \\ L &= Y_R - Y_c \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

当 Y_R 和 Y_c 包含几何坐标速率时，Θ 应包含 7 个相似变换参数及它们的变化率，共 14 个未知参数，此时设计矩阵 G 可由相似变换模型的一阶偏导数在 Y_R 处的取值组成。假设 L 等权，则由以上误差方程容易给出 Θ 的最优线性估计如下

$$\hat{\Theta} = (G^{\mathrm{T}}G)^{-1}G^{\mathrm{T}}L \tag{6}$$

如果 Y_c 也为待求的未知坐标，Y_R 为已知坐标，则 $\hat{\Theta} = 0$ 表示待求的 Y_c 与已知的 Y_R 对应的参考基准相同。可见只要在式(1)取 $C = (G^{\mathrm{T}}G)^{-1}G^{\mathrm{T}}$，$L_f = CY_R$，即可得到 14 个约束条件。此时，可由特定相似变换参数对应的约束条件定义平差系统不敏感的几何坐标基准，这些约束条件即最小约束条件。

Q_{L_f}可依据误差传播定律由 Y_R 的先验方差给出，也可事先给定[3]。按以上方法构造的矩阵 C 通常并不满足条件 $AC^{\mathrm{T}}=0$，因此并不具有最小方差的性质。

如果式(5)中 Y_c 也为未知参数，则对应的观测方程变为不定方程 $Y_R=Y_c+G\Theta$，此时可由 S 变换将 Y_R 对应的随机线性空间加权分解为正交的 Y_c 和 $G\Theta$ 的随机线性空间。可以证明，如果加权分解时权阵取为单位阵，则 $G\Theta$ 中 Θ 的形式与式(6)相同，且此时的 Y_c 十分接近于其伪逆解，而其方差矩阵接近于最小迹方差矩阵，这也是推导式(6)时 L 取等权的原因[4]。

3．统计约束在建立 TRF 中的应用

以上形式的最小约束可仅针对平差系统缺少不敏感的基准信息，从而间接保护观测量敏感的基准信息。在利用多种技术组建 TRF 时，可针对由解文件恢复的未加任何约束的法方程，施加统一的最小约束以弥补或增强该技术不敏感的基准信息。对于皱约束，由于其坐标估值有可能扭曲观测几何中包含的某些基准信息，因此需利用式(4)恢复的法矩阵，依据统一约定重新构造最小约束条件，并利用式(2)～式(3)获得相应的最小约束解。松约束虽然可以使几何构形的扭曲尽量最小化，但当观测时段比较短，观测技术单一时，其给出的坐标精度往往较实际情况要高，因此它给出的坐标精度指标仅能反映该技术在观测期间点位的相对变化，所以在组建 TRF 时可直接采用其参数估值 $\hat{X}_l$，而仅将其协方差矩阵 $Q_{\hat{X}_l}$ 依据式(3)中加横线的部分修正为 $Q_{\hat{X}_{lm}}$，即[1]

$$Q_{\hat{X}_{lm}}=Q_{\hat{X}_l}-Q_{\hat{X}_l}C^{\mathrm{T}}(Q_{L_f}+CQ_{\hat{X}_l}C^{\mathrm{T}})^{-1}CQ_{\hat{X}_l}\qquad(7)$$

式中，C、Q_{L_f}可由协议约定的最小约束条件进行构造。通常在组建新的 TRF 时，为了保证附加的最小约束能有效地弥补特定技术所不敏感的基准信息，可选取已有参考架中与新参考架重合的一组稳定的参考点组成的核心网统一附加最小约束条件。如 IERS 组建 ITRF2008 时，选取了与 ITRF2005 重合的 171 个参考点组成核心网，对于特定的 SINEX 解文件，可依据该文件中的先验约束信息，恢复未加任何约束信息的法方程，然后依据核心网利用最小约束条件补充法方程中缺少的基准信息，以获得该 SINEX 解文件对应的最小约束解[2,14]。如果拟采用特定技术观测量敏感精度较高的基准信息定义新参考架的参考基准，则此时一定不能针对此基准信息附加最小约束。考虑到空间大地测量技术均不能直接敏感方向信息，可利用核心网构造与定向基准参数对应的最小约束，从而使新建立的参考架与已有的参考架具有相同的定向，定向基准的连续性也可保证地球自转参数(ERP)的连续性，但并不能保证 TRF 相对于地壳无整体旋转的 ITRS 定义[1]。类似于发现地心运动后，ITRS 去除了地心整体无平移约束，新的 ITRS 定义亦可考虑去除相对于地壳整体无旋转的约束[2]。

三、函数模型约束

如果在数据处理时将未知参数之间确定的或明确定义的函数关系作为约束条件，这种形式的约束即函数模型约束。此时线性化的数据处理模型可表示为

$$\left.\begin{aligned}L&=AX,Q_L\\BX&=W\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

式中，B 为行满秩的条件矩阵，可采用附有约束条件的参数平差方法给出其最优线性估值[12]

$$\left.\begin{aligned}&\hat{X}=\underline{Q_{11}U+Q_{12}W}=\hat{X}_L-J(B\hat{X}_L-W)\\&\underline{Q_{\hat{X}}=Q_{11}}=Q_{\hat{X}_L}-JBQ_{\hat{X}_L}\\&J=Q_{\hat{X}_L}B^{\mathrm{T}}(BQ_{\hat{X}_L}B^{\mathrm{T}})^{-1}\\&\underline{\begin{bmatrix}N&B^{\mathrm{T}}\\B&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{bmatrix}}\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

式中，符号的含义与统计约束中的符号相同。

在式(9)中，如果 N 降秩，可利用加横线的部分进行求解；如果 N 满秩，可利用不加横线的部分进行求解，此时 $\hat{X}_L$、$Q_{\hat{X}_L}$为不考虑条件约束的参数解。也可将函数模型约束中的条件方程看做是具有无限权的虚拟观测量，可以证明它与具有条件的参数平差的解是等价的[12]。实用中，可将虚拟观测量的权取为一个适当的大数，但这有可能造成法方程的病态，从而影响解的可靠性。

式(9)中，如果取 $B=I$，$W=X^0$，则由式(9)易知此时 $\hat{X}=X^0$，$Q_{\hat{X}}=0$，即此时 X 的估值即其先验值，其方差为零表示没有误差。通常仅采用部分参数的先验值(定义值)，此时约束条件 $X_s=X_s^0$ 即固定约束[3]，应用中并不需要估计 X_s，只需将其作为定义常数使用即可。已知参数及其数值可明确定义数据处理的参考基准，只要独立基准参数的数目等于定义参数系统所需的基准数目，就可解决法方程秩亏的问题。如果观测量可与 X_s 建立函数关系，且观测量对 X_s 的取值足够敏感，此时如果采用独立方法确定的 X_s^0 可正好消除法方程的秩亏问题，则 X_s^0 可作为参考基准的理想定义。

与紧约束类似，不恰当的固定约束可能会破坏观测量所包含的客观信息。只要基准参数的精度远高于观测量中所包含的基准信息的精度时，就可以将这组参数作为基准进行数据处理，这也是实用中可以将 ITRF 参考点的坐标数值作为固定约束处理低等级应用的原因。本质上，ITRS 协议约定的几何坐标的参考基准是采用固定约束体现在数据处理中的，其中地心原点的基准参数选为 3 个数值为零的 1 阶引力位系数；尺度的基准参数选为 BIPM 定义的光速常数值[2,4]；协议约定的定向基准参数选为历元 ERP 参数和由实现了整体非旋转约束的板块运动速度场参数（或一个稳定 TRF 参考点坐标定义的定向信息）。这些基准参数可在线性化观测方程时，体现在与线性观测方程对应的观测量中，对于观测量不敏感（秩亏）或敏感度不高（病态）的基准参数，可有选择地附加前述的最小约束。

四、结束语

综上所述，虽然属于函数模型约束的固定约束可作为基准约束的理想形式，但由于观测条件的限制，短时间内在局部范围获得的观测量很难以足够的精度敏感这些基准参数，此时应附加适当的约束条件补充或加强相应的基准信息已获得待求参数的最优估值，文中所述的最小约束是较理想的选择，它也是 IERS 目前推荐使用的约束形式。需要注意的是，TRF 反映的是历元基准信息，而由常数定义的基准参数是瞬时的（或与历元无关），例如数值为零的 1 阶引力位系数反映的是瞬时地心，因此在以 TRF 的几何坐标作为参考基准时在所需精度范围内应顾及地心的变化。

致谢：本项研究在武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室完成，在此表示感谢。

参考文献：

[1] ALTAMIMI Z, SILLARD P, BOUCHER C. ITRF2000: A New Release of the International Terrestrial Reference Frame for Earth Science Applications [J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2002, 107(B10): 2214.

[2] ALTAMIMI Z, COLLILIEUX X, LEGRAND J, et al. ITRF2005: A New Release of the International Terrestrial Reference Frame Based on Time Series of Station Positions and Earth Orientation Parameters [J]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2007, 112 (B0): 9401.

[3] BÄHR H, ALTAMIMI Z, HECK B. Variance Component Estimation for Combination of Terrestrial Reference Frames [R]. Universität Karlsruhe: Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, 2007.

[4] SILLARD P, BOUCHER C. A Review of Algebraic Constraints in Terrestrial Reference Frame Datum Definition [J]. Journal of Geodesy, 2001(75): 63-73.

[5] DREWES H. Reference Systems, Reference Frames, and the Geodetic Datum——Basic Considerations [C] International Association of Geodesy Symposia. Germany: Springer-Verlag, 2008(133): 3-9.

[6] 朱文耀，熊福文，宋淑丽. ITRF2005 简介和评析 [J]. 天文学进展，2008，26(1): 1-14.

[7] 黄维彬. 近代平差理论及其应用 [M]. 北京：解放军出版社，1992: 160-165.

[8] 崔系璋，於宗俦，陶本藻，等. 广义测量平差 [M]. 武汉：武汉测绘科技大学出版社，2001: 16-17.

[9] 宁津生. 现代大地测量参考系统 [J]. 测绘学报，2002, 31(z1): 7-11.

[10] 陈俊勇. 中国现代大地基准——中国大地坐标系统 2000(CGCS 2000) 及其框架 [J]. 测绘学报，2008，37(3): 269-271.

[11] 王广利，李金岭，钱志瀚，等. 利用天测与测地 VLBI 观测建立天球与地球参考架 [J]. 测绘学报，2000，29(2): 114-117.

[12] 隋立芬，宋力杰，柴洪洲. 误差理论与测量平差基础 [M]. 北京，测绘出版社，2010: 55-98, 112-113.

[13] IERS Conventions. IERS Technical Note 36 [R]. Frankfurt am Main: BKG, 2010.

[14] ITRF. ITRF 2008 [EB/OL]. [2010-05]. http://itrf.ign.fr/ITRF_solutions/2008/ITRF2008.php.