

# 一种实时 GPS 姿态测量中的整周模糊度的解算方法

彭晓刚<sup>1,2</sup>, 吕志平<sup>1</sup>, 吝宁<sup>2</sup>

(1. 信息工程大学 测绘学院, 河南 郑州 450052; 2. 91404 部队, 河北 秦皇岛 066000)

## A Real-time Integer Ambiguity Resolution Algorithm for GPS Attitude Determination

PENG Xiaogang, LÜ Zhiping, LIN Ning

**摘要:** GPS 实时姿态测量的核心问题是整周模糊度的解算。提出一种适合实时姿态测量的模糊度解算方法, 它利用单差平滑伪距进行解算, 与传统的模糊度解算方法相比具有许多优点。通过仿真试验对该方法的有效性和实用性进行了验证。

**关键词:** GPS; 整周模糊度; GPS 姿态测量

### 一、引言

基于 GPS 的姿态测量是通过干涉测量和载波相位测量技术实现的。虽然载波相位测量能够得到高精度的姿态信息, 但其解算时存在模糊度, 会使测量结果存在偏差, 又给 GPS 姿态测量带来新的难题。因此, 利用载波相位进行实时动态测量的核心技术是运动中解算整周模糊度 (ambiguity resolution on the fly, OTF)。

目前许多学者对 OTF 方法进行了研究, 总体上讲可分两大类: 一类为整周模糊度搜索法。该方法就给定的 GPS 天线阵, 构造出所有可能模糊度的函数空间, 然后依残差平方和 (square sum of residual, SSR) 最小或模糊度函数值 (ambiguity function value, AFV) 最大准则在此空间内查找最佳解。由于模糊度的可能值相当多, 所以 Abidin、Leick 等又在此基础上提出了快速模糊度解算法 (fast ambiguity resolution approach, FARA)<sup>[1-2]</sup>, 其结果可能收敛于一组不正确的解。另一类解算方法为基于运动的模糊度法 (motion-based), 利用载体或 GPS 卫星的运动信息来实现<sup>[3-4]</sup>。该方法随着时间的推移不断采集载波相位信息, 并利用批量解算求解。该方法计算量更大, 解算条件也不易满足——要求至少 3 条非共面的基线<sup>[4]</sup>。

针对以上问题, 本文提出一种适合动态解算模糊度的方法, 其解算速度远快于上述方法, 并且计算量很小。

### 二、测量模型

#### 1. 整周模糊度估算和单差伪距平滑模型

假设进行单差的接收机分别为  $k$ 、 $m$ ; 卫星为  $p$ ; 相位一次差和伪距一次差分别为  $\varphi_{km}^p(t)$ 、 $p_{km}^p(t)$ 。假定一次差消除了主要的噪声偏差 (包括多路径影响) 则

$$p_{km}^p(t) = \rho_{km}^p(t) + \varepsilon_{\delta p}(t) \quad (1)$$

$$\varphi_{km}^p(t) = \rho_{km}^p(t) + \lambda_1 A_{km}^p + \varepsilon_{\delta \varphi}(t) \quad (2)$$

式中,  $\rho_{km}^p(t) = \rho_k^p(t) - \rho_m^p(t)$ ;  $A_{km}^p = A_k^p - A_m^p$ ; 参数  $\varepsilon_{\delta p}(t)$  和  $\varepsilon_{\delta \varphi}(t)$  为白噪声。假定采用 L1 波段, 波长为  $\lambda_1$ , 用式 (2) 减去式 (1) 得到

$$\varphi_{km}^p(t) - p_{km}^p(t) = \lambda_1 A_{km}^p + \varepsilon_{\delta \varphi \delta p}(t) \quad (3)$$

重新排列式 (3) 构造出整周模糊度估值

$$\hat{A}_{km}^p(t) = \frac{1}{\lambda_1} (\varphi_{km}^p(t) - p_{km}^p(t)) = A_{km}^p + \frac{1}{\lambda_1} \varepsilon_{\delta \varphi \delta p}(t) \quad (4)$$

如果连续观测, 并且没有周跳, 则式 (4) 中的噪声可以通过求均值减弱

$$\hat{A}_{km}^p(t) = \frac{1}{\lambda_1 N} \sum_{i=0}^n (\varphi_{km}^p(t_i) - p_{km}^p(t_i)) = A_{km}^p + \varepsilon_{\delta A}(t_n) \quad (5)$$

式中,  $N$  为历元数目;  $t_n$  为最近的历元;  $t_0$  为初始历元;  $\hat{A}_{km}^p(t_n)$  为模糊度估值。利用误差分布原理, 模糊度估值或者整周模糊度估值就可以用于式 (2) 进行单差伪距平滑

$$sp_{km}^p(t) = \varphi_{km}^p(t) - \lambda_1 \hat{A}_{km}^p(t) = \rho_{km}^p(t) + \varepsilon_{\delta sp}(t) \quad (6)$$

式中,  $sp_{km}^p$  为单差伪距平滑值。

### 2. 噪声测量模型

假设  $\sigma_p$ 、 $\sigma_\varphi$  为基本伪距和载波相位测量噪声的方差, 利用方差、协方差传播定理得到单差伪距测量和单差载波相位测量的噪声方差、协方差为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\delta p} &= \sqrt{2}\sigma_p \\ \sigma_{\delta\varphi} &= \sqrt{2}\sigma_\varphi \\ \sigma_{\delta\varphi\delta p} &= \sqrt{2(\sigma_p^2 + \sigma_\varphi^2)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

按照式(5)定义的模糊度的噪声方差为

$$\sigma_{\delta\hat{A}}(t) = \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{1}{N}(\sigma_p^2 + \sigma_\varphi^2)} \quad (8)$$

由式(6)~式(8)得到单差平滑伪距噪声的方差

$$\sigma_{\delta sp}(t) = \sqrt{2\left(\frac{1}{N}\sigma_p^2 + \left(1 + \frac{1}{N}\right)\sigma_\varphi^2\right)} \quad (9)$$

在模糊度解算完成前, 具有模糊度估算的单差载波相位(即单差伪距平滑)在计算中被作为观测值。因此单差伪距平滑的误差主要由两方面引起, 其中主要的误差源是模糊度估值的误差, 另外一个误差源是式(7)所示的单差载波相位的测量噪声。

### 三、姿态测量模糊度解算

GPS 姿态测量的误差方程为

$$\Delta y_i^j = y_i^j - b_i^T A \hat{s}^j \quad (10)$$

式中,  $y_i^j$  是基线  $i$  与卫星  $j$  组成的单差;  $b_i$  是定义在载体框架上的第  $i$  条基线矢量;  $A$  是当前计算的姿态矩阵;  $\hat{s}^j$  是主天线到卫星  $j$  的视线方向的单位矢量(如图1所示)。上式表明姿态测量残差取决于单差测量噪声和姿态矩阵  $A$  的偏差(由不正确姿态估计引起)。

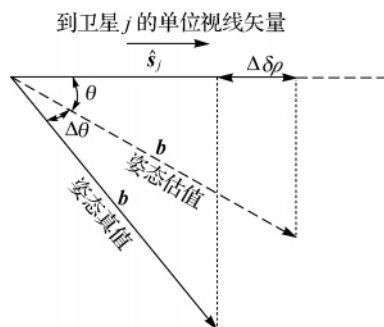


图1 估值误差  $\Delta\theta$  与测距误差  $\Delta\delta\rho$  的关系图

图1描述了姿态估值的误差  $\Delta\theta$  与卫星测距误差  $\Delta\delta\rho$  的关系, 即

$$\Delta\delta\rho = b\cos\theta - b\cos(\theta + \Delta\theta) = b\left(\frac{1}{2}\Delta\theta^2\cos\theta + \Delta\theta\sin\theta\right) \quad (11)$$

式中,  $\delta\rho$  表示单差距离;  $\Delta\delta\rho$  表示单差距离的误差;  $b$  是基线长度;  $\theta$  是姿态估值。如果所有的模糊度估值都正确,  $\Delta\theta$  将很小, 并且  $\Delta\delta\rho$  的最大值出现在  $\theta = 90^\circ$  时, 即

$$\Delta\delta\rho_{\max} = b\Delta\theta \quad (12)$$

由姿态精度和测量噪声之间的关系<sup>[4]</sup>  $\Delta\theta = \sigma_{\delta p}/b$  得到

$$\Delta\delta\rho_{\max} = \sigma_{\delta p} = \sigma_{\delta\varphi} \quad (13)$$

从式(10)得知, 最大测量残差模型为

$$\Delta y_{\max} = -\lambda_1 \Delta A_{km}^p \pm (\text{测量噪声})_{\max} \pm (\text{估算引起的误差})_{\max} \quad (14)$$

如果采用正确的模糊度估值,  $\Delta A_{km}^p$  将为0, 测量噪声为单差载波相位噪声, 姿态估算引起的误差见式(13)。在  $2\sigma$  的置信水平下, 得到

$$\Delta y_{C, \max} = 0 \pm 2\sigma_{\delta p} \pm 2\sigma_{\delta\varphi} = \pm 4\sigma_{\delta\varphi} = \pm 4\sqrt{2}\sigma_\varphi \quad (15)$$

如果所有的测量残差限制在式(15)的范围内, 那么可以判断所有的整周模糊度是正确的; 反之需要进行更多的测量。从统计意义上讲, 在  $2\sigma_{\delta\hat{A}} \leq 0.5$  步长时模糊度估值收敛于最近的整数, 那么该解正确的概率为95%。从式(8)可知, 该概率发生在

$$N_{\text{fix } 2\sigma} \approx \text{ceiling}[32\sigma_p^2/\lambda_1^2] \quad (16)$$

式中,  $\sigma_\varphi$  假定远远小于  $\sigma_p$ , 可以忽略。如果要求更高的置信水平, 即  $3\sigma_{\delta\hat{A}} \leq 0.5$  步长, 可以用下面的公式

$$N_{\text{fix } 3\sigma} \approx \text{ceiling}[72\sigma_p^2/\lambda_1^2] \quad (17)$$

### 四、适用方法

在所有模糊度固定于正确值之前, 其中有一些是不正确的。因此式(14)中不正确模糊度的测量残差应该为

$$\Delta y_w = -\lambda_1 \Delta A_{km}^p \pm 2\sigma_{\delta\varphi} \pm b\left(\frac{1}{2}\Delta\theta^2\cos\theta + \Delta\theta\sin\theta\right) \quad (18)$$

式中  $\sigma_{\delta\varphi}$  相对比较小, 可以忽略不计, 定义  $\Sigma_w$  为

$$\Sigma_w \equiv \pm b\left(\frac{1}{2}\Delta\theta^2\cos\theta + \Delta\theta\sin\theta\right) \quad (19)$$

$$\Delta y_w \approx -\lambda_1 \Delta A_{km}^p + \Sigma_w \quad (20)$$

式(20)右边的第一个量决定了测量残差的偏差, 根据  $\Delta y_w$  与  $\Delta A_{km}^p$  的关系, 绘制其散点图, 如图2、图3中“.”所示。第二个量决定了测量残差偏差的离散度, 在图2、图3中用灰色矩形框宽度表示, 当  $\Sigma_w > \lambda_1$  时, 考虑取值误差, 取离散度为  $\frac{4}{3}\lambda_1$ , 得

到图2; 当  $\Sigma_w < \lambda_1$  时, 考虑取值误差, 取离散度为  $\frac{2}{3}\lambda_1$ , 得到图3。

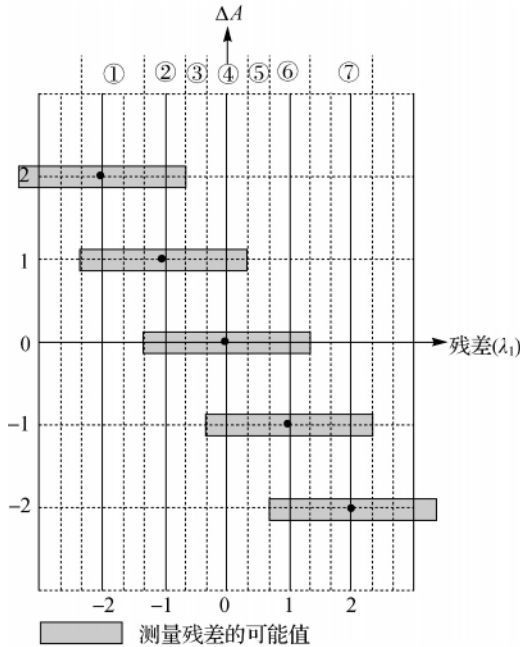


图2  $\Sigma_w > \lambda_1$  时可能的测量残差值

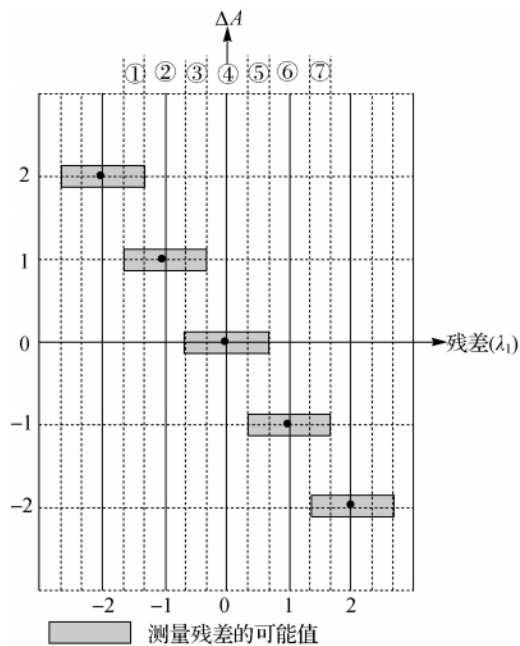


图3  $\Sigma_w < \lambda_1$  时可能的测量残差值

由图2可知, 如果测量残差在区域①, 整周模糊度估值可能大于真值(1~2)  $\lambda_1$ 。如果测量残差在区域②, 将有3种可能值。该情况下, 无论哪个区域估值都至少含有两种可能。

由图3可得, 如果测量残差在区域①, 估值仍然有两种情况。但是在区域②和⑥时, 仅有一种情

况——模糊度估值比真值大一个波长。因此, 可以把估值减去一个波长得到真正的模糊度值。在区域④, 得到的估值就是真值而无需改正。因此, 无论测量残差有多大, 只有它位于接近  $\lambda_1$  整数倍的模糊度区域, 都能够通过模糊度修正得到正确的整周模糊度。

总结该方法的处理过程如下:

- 1) 用整周模糊度估计的伪距平滑来处理姿态计算。
- 2) 判断测量残差是否满足  $\Sigma_w < \lambda_1$ 。
- 3) 判断测量残差所处的确定区域。
- 4) 修正  $\hat{A}_{km}^0$  为正确值。在接下来的历元中, 随着相应整周模糊度的固定, 载波相位测量能够顺利进行。并且, 即使相应的整周模糊度没有固定, 伪距平滑也能进行。重复该过程直到所有的整周模糊度固定为止。

### 五、模型验证

首先, 把天线固定于平台上, 保持平台位置和姿态不变。可见卫星数目为9颗。第1个模糊度固定出现在1s处。随着时间推移, 正确的整周模糊度数目越来越多, 直至稳定。

然后, 把天线固定于平台上, 保持平台俯仰角有周期的角动, 产生倾斜。由于平台的自然倾斜, 某些GPS卫星被平台遮挡, 不在接收机天线视线范围内。该区域的可见卫星, 最多时为9颗, 最少为6颗。第1个模糊度固定出现在9s处。12s时固定的模糊度数量是14个, 此时可见卫星是7颗。也就是说, 所有整周模糊度在12s以后都被解算出来。

### 六、结束语

本文基于伪距平滑计算模型, 提出了一种新的实时解算模糊度的方法。该方法与传统模糊度搜索方法比, 具有计算量小、解算速度快的特点。通过试验验证该算法是可行的, 能够满足实时解算要求。

### 参考文献:

[1] ABIDIN H Z. On the Construction of the Ambiguity Searching Space for On-the-fly Ambiguity Resolution [J]. Journal of The Institute of Navigation, 1993, 40(3): 321-338.

[2] LEICK A. GPS Satellite Surveying [M]. 3rd ed. New Jersey: John Wiley & Sons Inc, 357-380.

(下转第36页)

表2 山区用国土全景扫描卫星影像插补国土摄影测量卫星影像漏洞区试验

卫星 类型	变换公式	左影像像点补点				右影像像点补点				补点地面坐标误差 统计/m 统计点数5点		
		定向点误差 统计/mm 统计点数11点		检查点误差 统计/mm 统计点数7点		定向点误差 统计/mm 统计点数11点		检查点误差 统计/mm 统计点数7点				
		$m_x$	$m_y$	$m_x$	$m_y$	$m_x$	$m_y$	$m_x$	$m_y$	$m_x$	$m_y$	$m_z$
国土全景卫星	直接投影变换	±.141 5	±.263 9	±.103 9	±.203 7	±.177 3	±.318 2	±.150 7	±.254 0	±80.3	±160.7	±159.2
国土全景卫星	二次多项式变换	±.076 8	±.184 1	±.086 1	±.241 0	±.048 7	±.183 8	±.052 3	±.240 6	±38.0	±196.1	±130.8
国土全景卫星	二三多项式变换(1)	±.076 8	±.116 7	±.085 8	±.500 4	±.048 7	±.117 1	±.052 1	±.508 8	±31.2	±406.9	±130.0
国土全景卫星	二三多项式变换(2)	±.076 8	±.148 3	±.086 0	±.202 1	±.048 7	±.149 8	±.052 2	±.204 3	±37.4	±167.6	±130.7

#### 四、分析与结论

通过上面的试验分析,可以得出以下几个结论:

1) 4种卫星影像资料插补像点(漏洞)及平差试验结果,综合评价平面和高程精度,以选用二三多项式变换的效果最佳。使用线性正形变换公式和三次多项式的结果不够稳定,常出现难以预料的较大波动,要慎用。

2) SPOT、TM、国土全景卫星都是长焦距、高轨道摄影,地形起伏对投影差的影响相对较小,因而在平坦地区用单片插补漏洞的效果明显(如表1所示);但对于山区(如表2所示)则明显变坏,说明投影差的影响不能忽视(该试验区内控制点间的最大高差为1322m)。

3) 单片变换后的插补点坐标受周围控制点高程的影响,而且与该点距地底点的距离有关。因此,插补像点时,应挑选漏洞居影像中心区最近的像幅,以及应尽量在平均高程地带或接近插补点高程地区选取控制点,以便最大限度地限制投影差的影响。如若用两种或两种以上单张像片共同插补同一漏洞,即进行立体插补效果会更好。

4) 分析国土全景卫星影像插补漏洞的结果还

发现: $x$ 和 $y$ 方向的精度并不均衡, $m_y$ 误差明显大于 $m_x$ 误差。说明当前将国土全景卫星影像纠正成为中心投影影像所用的公式,考虑的变形因素还不全面,应进一步完善。

5) 试验中所用的控制点和检查点坐标值均取自1:50000比例尺地形图。精度远远低于内业观测精度,若改善外业控制点的精度,还能更好地提高控制网加密点的精度。

#### 参考文献:

- [1] 李德仁.论自检校区域网平差中的信噪比[J].测绘学报,1982;11(3):170-184.
- [2] 李德仁,郑肇葆.解析摄影测量学[M].北京:测绘出版社,1992:26-66.
- [3] 钱曾波.解析空中三角测量基础[M].北京:测绘出版社,1980:162-184.
- [4] 王之卓.摄影测量原理[M].北京:测绘出版社,1984:321-325.
- [5] 巩丹超,张永生,陈筱勇.线阵CCD推扫式影像的扩展核线模型[J].测绘科学技术学报,2006,23(4):246-249.
- [6] 姜挺,龚志辉.航天遥感空间系统[M].北京:解放军出版社,2003:154-185.
- [7] YOON S, LUNDBERG J B. An Integer Ambiguity Resolution Algorithm for Real-time GPS Attitude Determination[J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, 129(1): 21-41.
- [8] TEUNISSEN P J G, DE JONGE P J, TIBERIUS C C J M. Performance of the LAMBDA Method for Fast GPS Ambiguity Resolution[J]. Navigation, 1997, 44(3): 373-383.
- [9] HATCH R. The Synergism of GPS Code and Carrier Measurements[C]//Proceedings of the Third International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning. NM: New Mexico State University, 1983: 8-12.

(上接第18页)

- [3] YOON S. Real-time Attitude Determination Using the Global Positioning System[D]. Auburn: Auburn University, 1999.
- [4] COHEN C. Attitude Determination[J]. Global Positioning System: Theory and Applications. 1996, 19(7): 519-538.
- [5] QUINN P G. Instantaneous GPS Attitude Determination[C]//Proceedings of ION GPS-93. Salt Lake City: ION, 1993: 603-615.
- [6] KNIGHT D. A New Method of Instantaneous Ambiguity Resolution[C]//Proceedings of ION GPS-94. Salt Lake City: ION, 1994, 707-716.