

文章编号: 1001-1595(2011) 01-0059-07

# 离散三角网格系统距离量测方法

袁 文<sup>1</sup>, 庄大方<sup>1</sup>, 袁 武<sup>2</sup>, 唐志峰<sup>2</sup>, 邱冬生<sup>1</sup>

1. 中国科学院 地理科学与资源研究所 资源与环境科学数据中心, 北京 100101; 2. 北京理工大学 计算机学院, 北京 100081

## Distance Function for the Triangular Grids

YUAN Wen<sup>1</sup>, ZHUANG Dafang<sup>1</sup>, YUAN Wu<sup>2</sup>, TANG Zhifeng<sup>2</sup>, QIU Dongsheng<sup>1</sup>

1. Data Center for Resources and Environmental Sciences, Institute of Geography Science and Natural Resource, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China; 2. School of Computer Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract: A distance metric of 12-connection for triangular grid is provided. According to the triangular distance metric, a new corresponding triangular three dimension coordinate system (TTDCS) is constructed. Coordinate transformations among several coordinate systems are given. And the distance equations, in both TTDCS and scanning coordinate system (SCS), are presented.

Key words: discrete triangular grid; coordinate system; coordinate transformation; distance metric

摘 要: 根据离散三角网格系统的空间分布特征, 构建新型的十二连通拓扑空间几何距离量测方法, 根据三角网格的边的方向性差异性及空间分布格局特征提出一种新型的三角网格单元三维 *IJK* 坐标系, 给出该坐标系与传统行列坐标系的坐标转换方法, 推导三角网格系统的距离计算公式, 为基于三角网格系统构建的柏拉图立体三角网格剖分系统的距离计算奠定了基础。

关键词: 离散三角网格; 坐标系; 坐标转换; 距离量测

中图分类号: P237 文献标识码: A

基金项目: 国家自然科学基金(41071252, 60902059); 国家 863 计划(2007AA12Z202); 十一五科技支撑计划(2008BAC34B06); 武汉大学测绘开放基金(09103)

## 1 引言

传统栅格系统以矩形网格为主, 坐标表示简单, 计算方便, 广泛应用在计算机图像处理、地理信息技术及计算机游戏开发等领域。随着全球遥感影像数据库、新型图像处理技术、正六边形网格 CCD 点阵排列方式及游戏开发等技术的发展, 正三角形及正六边形等均匀几何离散网格系统逐渐得到关注<sup>[1-11]</sup>。由于具有区域完全填充、节点空间均匀分布及形状逼近圆等特点, 正六边形网格已成为图像处理领域的前沿热点研究方向<sup>[11]</sup>。正六边形网格等价于等边三角网格系统, 多数正六边形网格系统研究往往将正六边形网格直接转换为等边三角网格。等边三角网格系统具备正六边形网格系统的主要优点, 且相对灵活和更具可扩展性。三角网格系统具有如下优势: ①三角网格表示圆比矩形网格系统更准确, 效率更高<sup>[6, 12]</sup>;

②三角网格与当前的三维可视化技术的基本数据结构一致; ③容易构建正六边形网格; ④可以扩展到正四面体、正八面体、正十二面体、正二十面体等正多面体以构建全球网格剖分模型。

距离量测是空间度量的基础。传统的栅格系统拓扑空间几何距离量测方法包括曼哈顿方法以及棋盘方法<sup>[13-14]</sup>。这两种方法适宜于矩形栅格系统。由于三角网格单元的空间格局与矩形网格存在较大差异, 三角网格每个单元与三个单元边邻接, 同时与另外九个单元节点邻接, 上述两种距离量测方法无法直接扩展到三角网格系统。文献[1]提出三角网格节点距离的量测方法。由于节点量测方法仅考虑节点之间的空间关系, 但三角网格单元是由三个节点, 三个边所组成的区域或面状特征, 不能直接应用于三角网格单元的距离量测。除了文献[4-9]给出的基于邻域序列的最短路径的计算方法, 迄今尚未见有三角网格系统

距离量测方法的有关文献。虽然三角网格单元存在方向差异性,但三角网格单元的节点连通格局一致,每个三角网格单元都与十二个三角网格单元邻接,组成一个近似正六边形的环状结构。利用这种环状拓扑空间分布格局可以建立一种新的三角网格系统量测方法。

球面三角剖分网格是全球网格模型的主要剖分方式<sup>[15-21]</sup>。近二十年来,全球网格模型的研究在剖分模型、编码模型等方面取得了长足进展,但距离量测亟待突破,直接阻碍全球网格模型的实用化。解决全球网格模型的拓扑空间几何距离量测是全球网格模型距离量测的第一步,因此解决三角网格系统距离量测方法,将有助于构建基于三角网格剖分的全球网格模型的距离量测技术。

基于如上需求,根据三角离散网格的空间分布格局,构建一种十二连通的三角网格系统拓扑空间几何距离量测方法。在此基础上,根据三角网格的三边方向性差异性及其空间分布格局特征,将三轴坐标系引入到三角网格系统,设计一种新型的三角网格三维坐标系,构建基于  $IJK$  坐标的三角网格单元新的定位方法,进而推导三角网格系统的距离量测计算公式。

## 2 三角网格系统十二连通拓扑空间几何距离量测基本方法

### 2.1 三角网格系统十二连通拓扑空间几何距离

设三角网格单元系统中任意三角网格单元  $CA$ , 与之邻接的三角网格单元为  $CNCA_i$ ,  $1 \leq i \leq 12$ 。三角网格单元距离定义如下:

- (1)  $CA$  与自身的距离为零, 即  $D(CA, CA) = 0$ ;
- (2)  $CA$  与邻接三角网格单元的距离为一个单位长度, 即

$$D(CNCA_i, CA) = 1 \quad (1)$$

(3) 对于非直接邻接三角单元  $CB$  及与  $CB$  邻接的三角网格单元  $CNCB_i$ ,  $i \in (1, 2, \dots, 12)$ ,  $CB$  到  $CA$  的距离比  $CNCB_i$  到  $CA$  的距离的最小值大一个单位, 即

$$D(CB, CA) = \min(D(CNCB_i, CA) + 1) \quad (2)$$

通过以上定义, 逐层地生成  $CA$  的等距离线空间分布图(图 1)。显然该等距离线为由多个三角单元组成的类似正六边形的环状结构。该环状结构与节点的等距离线类似。

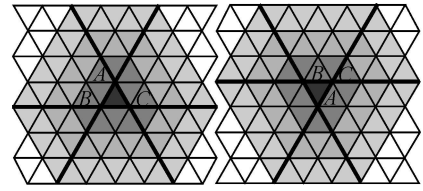


图 1 三角网格系统等距离线空间分布格局  
Fig. 1 Contours of triangular grids

### 2.2 三角网格节点距离

引入节点距离如下:

- (1) 节点  $NA$  和自己的距离为 0, 即  $D(NA, NA) = 0$ ;
- (2) 节点  $NA$  和其邻接节点  $NNA_i$  的距离为一个单位, 即

$$D(NNA_i, NA) = 1 \text{ 或者 } D(NA, NNA_i) = 1, 1 \leq i \leq 6 \quad (3)$$

(3) 与  $NA$  非直接邻接的节点  $NB$  及  $NB$  的邻接节点为  $NNB_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , 则

$$D(NB, NA) = \min(D(NNB_i, NA) + 1) \quad (4)$$

上述节点距离等价于文献[1]所提出的六边形网格节点距离量测机制。文献[1]给出的六边形网格节点距离量测公式如下

$$D_6((i, j), (h, k)) = \begin{cases} |i-h| + |j-k| & \text{当 } (i-j) \text{ 和 } (h-k) \text{ 同号} \\ \max(|i-h|, |j-k|) & \text{当 } (i-j) \text{ 和 } (h-k) \text{ 异号} \end{cases} \quad (5)$$

为表达方便, 引入平面三维节点坐标系  $(x, y, z)$  (图 2), 其中  $x, y, z$  的关系为  $z = x + y$ 。可证明式(5)与下式等价

$$D_6((x_a, y_a, z_a), (x_b, y_b, z_b)) = \max(|x_a - x_b|, |y_a - y_b|, |z_a - z_b|) \quad (6)$$

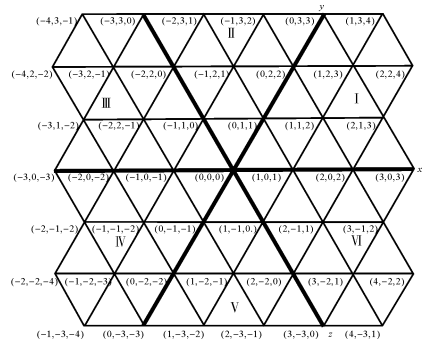


图 2 三角网格节点坐标系

Fig. 2 Triangular coordinate for node

由上式可知, 将节点坐标原点移至点  $(x^b, y^b, z^b)$ , 三维坐标轴将三角网格空间划分为六个区域, 每个区域中节点与原点之间的距离存在相似数学关系。等距节点组成以原点为中心的正六边形。

定理: 设三角网格单元  $CA$  和  $CB$  的节点分别为  $NCA_i$  和  $NCB_j, 1 \leq i, j \leq 3$ , 则存在关系:  $D(CB, CA) = \min(D(NCA_i, NCB_j) | 1 \leq i, j \leq 3) + 1$ 。

证明: 根据文献[1]定理, 对于任意节点对  $(NCA_i, NCB_j)$ , 至少存在一条连接两点的最短距离的节点链。设节点最短距离为  $DN (DN > 0)$ , 节点链两端的三角网格单元之间的距离  $DC$ , 则存在关系

$$DN - 1 \leq DC \leq DN + 1 \quad (7)$$

设节点对  $(NCA_p, NCB_q)$  在所有节点对中的距离最小。根据节点邻接格局可知, 存在关系

$$DN_{(p,q)} \leq DN_{(i,j)} \leq DN_{(p,q)} + 2 \quad (8)$$

将式(8)展开, 分别代入式(7), 即

$$\left. \begin{aligned} DN_{(p,q)} - 1 &\leq DC \leq DN_{(p,q)} + 1 \\ DN_{(p,q)} &\leq DC \leq DN_{(p,q)} + 2 \\ DN_{(p,q)} + 1 &\leq DC \leq DN_{(p,q)} + 3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

化简后, 得到

$$DC = DN_{(p,q)} + 1 \quad (10)$$

证毕。

三角网格单元由三条边组成, 因此在节点距离基础上引入点到边的距离。设点  $NP$  到边  $NANB$  的距离为该点到边上所有点的距离最小值。与边等距的节点的空间分布如图 3 所示。

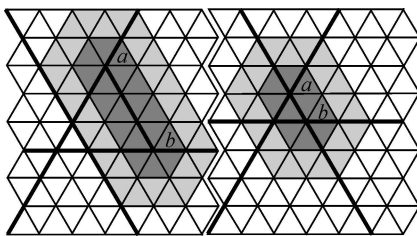


图 3 边等距线的空间分布格局  
Fig. 3 Isolines of nodes

推论: 三角网格单元  $CB$  到  $CA$  的距离等于  $CB$  的三个节点到  $CA$  三边距离的最小值的最大值, 即

$$D(CB, CA) = \max(\min(D(NCB_i, NCA_j, NCA_k) | 1 \leq j, k \leq 3, j \neq k) | 1 \leq i \leq 3) \quad (11)$$

证明: 根据节点到边的距离定义, 三角网格单

元距离公式  $D(CB, CA) = \min(D(NCA_i, NCB_j) | 1 \leq i, j \leq 3) + 1$  可改写为如下形式

$$D(CB, CA) = \min(D(NCB_i, NCA_j, NCA_k) | 1 \leq i, j, k \leq 3, j \neq k) + 1 \quad (12)$$

由三角节点邻接格局可知,  $CB$  的三个节点与  $CA$  的三边的最小距离差值为 1, 因此, 上式可改写为

$$D(CB, CA) = \max(\min(D(NCB_i, NCA_j, NCA_k) | 1 \leq j, k \leq 3, j \neq k) | 1 \leq i \leq 3) \quad (13)$$

证毕。

### 3 三角网格三维 $IJK$ 坐标系

#### 3.1 $IJK$ 坐标系定义

由于三角网格单元的边分别对应不同的方向, 根据边和节点的距离的空间分布特征, 可构建三角网格三维  $IJK$  坐标新系统, 其三个坐标轴方向与三角网格单元的三边平行。三角网格单元空间分布存在方向差异性, 按三角垂直方向的顶点位置的不同, 可分为正向三角和负向三角(见图 4、图 5)。三角网格单元方向不同, 所对应的坐标系形态略有差异:

(1) 当原心为正向三角单元时(图 4), 称该坐标系为 I 型坐标系, 该坐标系统包括东西方向的水平  $I$  轴、东北西南方向的  $J$  轴及西北东南方向的  $K$  轴, 任意两轴间的夹角为  $60^\circ$ 。

(2) 当原心为负向三角单元时(图 5), 称该坐标系为 II 型坐标系。

使用三值坐标对  $(i, j, k)$  定位三角网格三维坐标系中的任意三角网格单元, 坐标值等于该三角网格单元分别到  $I, J, K$  轴的三角单元距离。

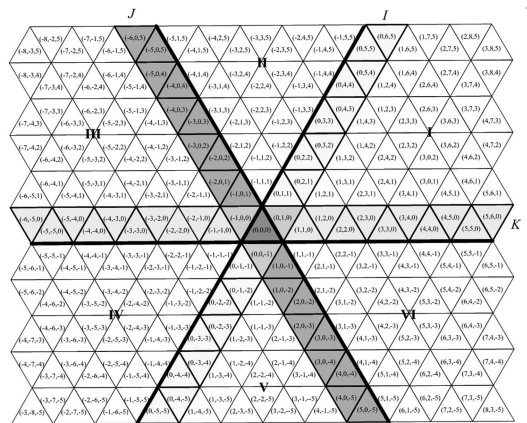


图 4 I 型三角网格三维坐标系

Fig. 4 Triangular three dimension coordinate of case I

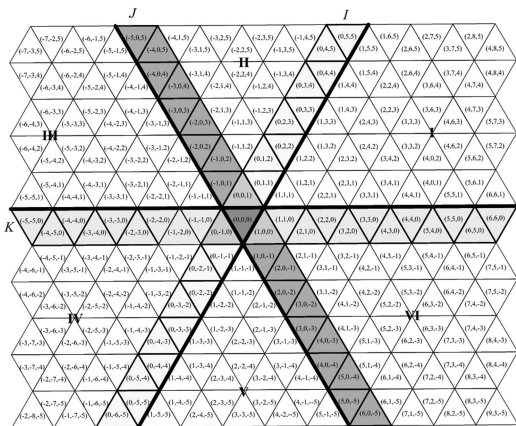


图5 II型三角网格三维坐标系

Fig. 5 Triangular three dimension coordinate of case II

假设当前坐标系为I型, 三角网格单元  $CA$  的坐标为  $(i, j, k)$ 。将坐标原点沿  $I$  轴右移  $m$  个单元, 此时  $CA$  对应坐标为  $(i', j', k')$ , 存在如下关系

$$\left. \begin{aligned} i' &= i - m \\ j' &= j - m \\ k' &= k \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

当  $m$  为奇数时, I 型坐标系转换为 II 型坐标系;  $m$  为偶数时, 坐标系形态保持不变。II 型坐标系统沿  $I$  轴左移或者右移单位个数为奇数时, 将转变为 I 型坐标系。

### 3.2 坐标系方向的空间分布格局

三角网格单元的方向沿  $I$  轴交替分布。沿该方向从原点三角网格单元开始计数, 当计数为偶数时三角网格单元的方向与原心一致; 当为奇数时则相反。计数到单元  $(i, j, k)$ , 其值为  $i + j - k$ 。由于  $i + j + k = i + j - k + 2k$  与  $i + j - k$  奇偶性一致, 有如下规律: ① 当  $i + j + k$  为偶数, 该三角网格单元方向与原心相同; ② 当  $i + j + k$  为奇数, 该三角网格单元方向与原心相反。

## 4 三角网格三维 $IJK$ 坐标系的坐标转换

### 4.1 单元行列坐标系 $(u, v)$ 及节点坐标系

三角网格单元行列坐标系是最常用的三角网格坐标定位方式(图6)。设三角网格单元  $CA$  的

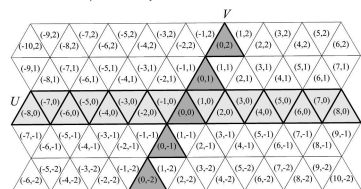


图6 三角网格行列坐标系

Fig. 6 Triangular scanning coordinate

行列坐标为  $(u, v)$ 。为计算方便, 令行列坐标系原点仅选择正向三角网格单元。

设  $CA$  的三个节点的坐标为  $N_1(x_1, y_1)$ ,  $N_2(x_2, y_2)$  和  $N_3(x_3, y_3)$ 。三角网格单元行列坐标与节点坐标关系如下。

当正向三角时

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor, y_1 = v + 1 \\ x_2 &= \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor, y_2 = v \\ x_3 &= \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor + 1, y_3 = v \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

当负向三角时

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor, y_1 = v + 1 \\ x_2 &= \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor + 1, y_2 = v \\ x_3 &= \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor + 1, y_3 = v + 1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中,  $\lfloor a \rfloor$  为计算比  $a$  小的最大整数的操作算子, 当  $a \geq 0$  时, 其值等于  $a$  的整数部分; 当  $a$  为负整数时, 其值等于  $a$ ; 当  $a$  为负小数时, 其值为比  $a$  小的最大整数。

节点坐标转换为三角网格单元行列坐标方程

$$\left. \begin{aligned} v &= \min(y_1, y_2, y_3) \quad \text{或} \\ v &= \max(y_1, y_2, y_3) - 1 \\ u &= x_1 + x_2 + x_3 - \max(x_1, x_2, x_3) \quad \text{或} \\ u &= x_1 + x_2 + x_3 - \min(x_1, x_2, x_3) + 1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

### 4.2 行列坐标转换为三维坐标

行列坐标系只能直接转换为 I 型, 方程如下

$$\left. \begin{aligned} i &= \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor \\ j &= \left\lfloor \frac{u+1}{2} \right\rfloor + v \\ k &= v \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

当目标坐标系的原点发生平移时, 新原点移至  $(u_1, v_1)$ , 则转换方程为

$$\left. \begin{aligned} i &= \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{u_1}{2} \right\rfloor \\ j &= \left\lfloor \frac{u+1}{2} \right\rfloor + v - \left\lfloor \frac{u_1+1}{2} \right\rfloor - v_1 \\ k &= v - v_1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

### 4.3 三维坐标转换为行列坐标

I 型坐标系转换方程如下

$$\left. \begin{aligned} u &= i + j - k \\ v &= k \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

II 型坐标系转换方程。II 型三维坐标系转换为行列坐标系时, 为与行列坐标系的标准原心相吻合, 行列坐标的原点为 II 型坐标系原心的左侧邻接单元。转换方程如下

$$\left. \begin{aligned} u &= i + j - k + 1 \\ v &= k \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

### 5 三角网格三维 IJK 坐标系距离计算

#### 5.1 任意三角网格单元与原点之间的距离计算方法

根据三角网格单元距离量测体系的相关理论, 三角网格单元之间的距离可以借助三角网格节点的空间格局进行计算。为直观, 将等边三角网格单元系统转换为图 7 中的直角三角网格单元系统。虽然三角网格单元的形状变为等腰直角三角形, 但节点的空间拓扑关系不变, 因此通过三角网格节点计算三角网格单元之间的距离不受三角网格单元形状的变化影响。

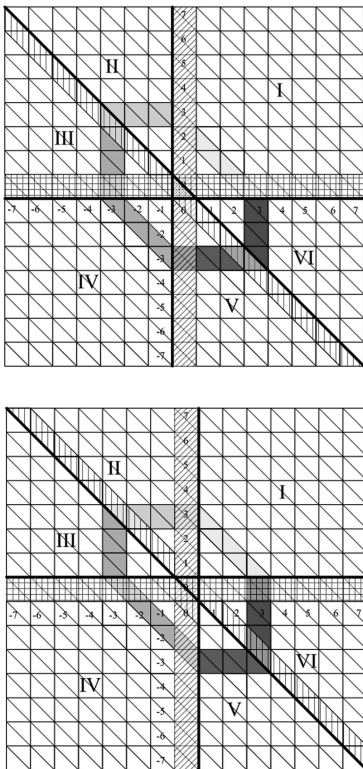


图 7 三角网格三维直角坐标系

Fig. 7 Triangular three dimension rectangular coordinate

原点三角网格单元的三边延长线将三角网格空间划分为七个区域, 即 I、II、III、IV、V、VI 以及原点三角网格单元本身。

I 型坐标系, 节点坐标与三角网格三维坐标关系如下

$$\left. \begin{aligned} i &= \min(x_1, x_2, x_3) \\ j &= \min(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ k &= \min(y_1, y_2, y_3) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

II 型坐标系, 节点坐标与三角网格三维坐标关系如下

$$\left. \begin{aligned} i &= \min(x_1, x_2, x_3) \\ j &= \min(x_1 + y_1 - 1, x_2 + y_2 - 1, x_3 + y_3 - 1) \\ k &= \min(y_1, y_2, y_3) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

根据推论分析, 节点空间分布格局有如下规律:

(1) I 区域里的任意三角网格单元的任意节点与原点三角单元三边的距离的最小值等于  $x_i + y_i - 1$ , 当为 I 型坐标系时;  $x_i + y_i - 2$ , 当为 II 型坐标系时。根据推论可知, 该区域中三角网格单元与原点的距离等于  $\max(x_1 + y_1 - 1, x_2 + y_2 - 1, x_3 + y_3 - 1)$ , 当为 I 型坐标系时;  $\max(x_1 + y_1 - 2, x_2 + y_2 - 2, x_3 + y_3 - 2)$ , 当为 II 型坐标系时。由于  $x_1 + y_1 - 1, x_2 + y_2 - 1, x_3 + y_3 - 1$  之间的差值为 1, 因此  $\max(x_1 + y_1 - 1, x_2 + y_2 - 1, x_3 + y_3 - 1)$  可改写为  $\min(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ 。同理  $\max(x_1 + y_1 - 2, x_2 + y_2 - 2, x_3 + y_3 - 2)$  等价于  $\min(x_1 + y_1 - 1, x_2 + y_2 - 1, x_3 + y_3 - 1)$ 。根据式(22)和式(23)可知, 该网格单元与原点的距离等于该单元  $J$  坐标的绝对值。

同理可分析 IV 区域, 该区域中任意三角网格单元的任意节点与原点三角单元三边的距离的最小值为  $|x_i + y_i|$ , 当为 I 型坐标系时;  $|x_i + y_i - 1|$ , 当为 II 型坐标系时。根据推论可知, 该区域中三角网格单元与原点的距离为  $\max(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|, |x_3 + y_3|)$ , 当为 I 型坐标系时; 或者  $\max(|x_1 + y_1 - 1|, |x_2 + y_2 - 1|, |x_3 + y_3 - 1|)$ , 当为 II 型坐标系时。在 I 型坐标系的 IV 区域中, 由于  $x_i \leq 0$  且  $y_i \leq 0$ , 因此  $\max(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|, |x_3 + y_3|)$  等价于  $|\min(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)|$ 。对于 II 型坐标系的 IV 区域, 因  $x_i \leq 1, y_i \leq 1$  且  $x_i + y_i - 1 \leq 0$ , 故  $\max(|x_1 + y_1 - 1|, |x_2 + y_2 - 1|, |x_3 + y_3 - 1|)$  等价于  $|\min(x_1 + y_1 - 1, x_2 + y_2 - 1, x_3 + y_3 - 1)|$ 。根据式(22)和式(23)可知, 该网格单元与原点的距离等于该单元  $J$  坐标的绝对值。

因此, 在 I 和 IV 区域中, 三角网格单元到原点

的距离等于该单元  $J$  坐标的绝对值。

(2) II 区域中任意三角网格单元三个节点与原点的三边的距离最小值等于  $|y_i - 1|$ 。由推论可知, 该区域中三角网格单元与原点的距离等于  $\max(|y_1 - 1|, |y_2 - 1|, |y_3 - 1|)$ 。由于  $y_i \geq 1$  且  $y_1 - 1, y_2 - 1$  和  $y_3 - 1$  之间的绝对差值为 1, 因此  $\max(|y_1 - 1|, |y_2 - 1|, |y_3 - 1|)$  等价于  $\min(|y_1 - 1|, |y_2 - 1|, |y_3 - 1|) + 1$ , 即  $\min(y_1, y_2, y_3)$ 。

V 区域中任意三角网格单元三个节点与原点的三边的距离最小值等于  $|y_i|$ 。由推论可知, 该区域中三角网格单元与原点的距离等于  $\max(|y_1|, |y_2|, |y_3|)$ 。由于  $y_i \leq 0$  且  $y_1, y_2, y_3$  之间的绝对差值为 1, 因此  $\max(|y_1|, |y_2|, |y_3|)$  等价于  $|\min(y_1, y_2, y_3)|$ 。

因此, 根据式(22)和式(23)可知, II 和 V 区域中, 该网格单元与原点的距离等于该单元  $K$  坐标的绝对值。

(3) II 区域任意三角网格单元三个节点与原点的三边的距离最小值等于  $|x_i|$ 。由推论可知, 该区域中三角网格单元与原点的距离等于  $\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ 。由于  $x_i \leq 0$ , 该式等价于  $|\min(x_1, x_2, x_3)|$ , 即该单元  $I$  坐标的绝对值。

VI 区域任意三角网格单元三个节点与原点的三边的距离最小值等于  $|x_i - 1|$ 。由推论可知, 该区域中三角网格单元与原点的距离等于  $\max(|x_1 - 1|, |x_2 - 1|, |x_3 - 1|)$ 。由于  $x_i \geq 1$  且  $x_1, x_2$  和  $x_3$  差值为 1, 因此该式等价于  $\min(x_1, x_2, x_3)$ , 即该单元  $I$  坐标的绝对值。

因此, 根据式(22)和式(23)可知, III 和 VI 区域中, 该网格单元与原点的距离等于该单元  $I$  坐标的绝对值。

表 1 和表 2 分别为三维坐标在各区域的分布特征。

表 1 I 型  $IJK$  三维坐标在 I 至 VI 区域的分布特征

Tab. 1 Distribution of  $IJK$  coordinates for case I

	$I$	$J$	$K$	大小关系	到原点的距离
I	$\geq 0$	$> 0$	$\geq 0$	$ j  \geq  k $ 且 $ j  \geq  i $	$ j $
II	$< 0$	$> 0$	$> 0$	$ k  \geq  i $ 且 $ k  \geq  j $	$ k $
III	$< 0$	$\leq 0$	$\geq 0$	$ i  \geq  k $ 且 $ i  \geq  j $	$ i $
IV	$< 0$	$< 0$	$< 0$	$ j  \geq  k $ 且 $ j  \geq  i $	$ j $
V	$\geq 0$	$\leq 0$	$< 0$	$ k  \geq  i $ 且 $ k  \geq  j $	$ k $
VI	$> 0$	$> 0$	$< 0$	$ i  \geq  k $ 且 $ i  \geq  j $	$ i $

因此, 根据上述分析结果及坐标的区域分布特征, 可得出三角网格单元  $CP(i, j, k)$  到原点

$CO(0, 0, 0)$  的距离计算公式如下

$$D(CP, CO) = \max(|i|, |j|, |k|) \quad (24)$$

表 2 II 型  $IJK$  三维坐标在 I 至 VI 区域的分布特征

Tab. 2 Distribution of  $IJK$  coordinates for case II

	$I$	$J$	$K$	大小关系	到原点的距离
I	$> 0$	$> 0$	$> 0$	$ j  \geq  k $ 且 $ j  \geq  i $	$ j $
II	$\leq 0$	$\geq 0$	$> 0$	$ k  \geq  i $ 且 $ k  \geq  j $	$ k $
III	$< 0$	$< 0$	$\geq 0$	$ i  \geq  k $ 且 $ i  \geq  j $	$ i $
IV	$\leq 0$	$< 0$	$\leq 0$	$ j  \geq  k $ 且 $ j  \geq  i $	$ j $
V	$> 0$	$< 0$	$< 0$	$ k  \geq  i $ 且 $ k  \geq  j $	$ k $
VI	$> 0$	$\geq 0$	$\leq 0$	$ i  \geq  k $ 且 $ i  \geq  j $	$ i $

转换为行列坐标系, 距离计算公式如下

$$D(CP, CO) = \max(|[\frac{u}{2}]|, |[\frac{ut}{2}] + v|, |v|) \quad (25)$$

5.2 任意两三角网格单元之间的距离计算方法  
任意三角网格单元之间的距离计算可以通过坐标平移将原点三角单元移至其中一个三角网格单元, 然后根据式(1)的方法进行计算。

经过上述计算过程, 得到三角网格单元  $CA(i_a, j_a, k_a)$  和  $CB(i_b, j_b, k_b)$  之间的距离计算公式如下

$$D(CA, CB) = \max(|i_a - i_b|, |j_a - j_b|, |k_a - k_b|) \quad (26)$$

转换为行列坐标系, 其距离计算公式如下

$$D(CA, CB) = \max(|[\frac{u_a}{2}] - [\frac{u_b}{2}]|, |[\frac{u_a + 1}{2}] + v_a - [\frac{v_b + 1}{2}] - v_b|, |v_a - v_b|) \quad (27)$$

5.3 三角网格单元距离计算的基本性质

三角网格单元十二连通距离量测方法满足距离量测体系的三个基本条件, 即如下关系:

①  $D(CA, CA) = 0$ ; ②  $D(CA, CB) = D(CB, CA)$ ; ③  $D(CA, CC) + D(CC, CB) \geq D(CA, CB)$ 。

首先从三角网格单元距离定义直接获取 ①。

根据推论,  $CA$  和  $CB$  的距离等于最小节点距离, 节点距离本身具有自反性, 显然 ② 结论成立。

③ 的证明相对复杂。为了简化, 假设  $CC$  为正三角单元, 以  $CC$  为坐标原点, 构建 I 型坐标系。本处仅考虑  $CA$  位于 I 区域。

当  $CB$  位于 I 区域时,  $D(CA, CC) = \max(|i_a|, |j_a|, |k_a|)$ ,  $D(CB, CC) = \max(|i_b|, |j_b|, |k_b|)$ , 而  $D(CA, CB) = \max(|i_a - i_b|, |j_a - j_b|, |k_a - k_b|)$ , 因六个坐标值大于等于零,  $|i_a - i_b|, |j_a - j_b|, |k_a - k_b|$  比  $|i_a|, |j_a|, |k_a|, |i_b|, |j_b|$  和

$|k^b|$  中任意值都小, 显然结论成立; 当  $CB$  位于 II 区域时,  $D(CA, CB) = \max(|i^a| + |i^b|, |j^a - j^b|, |k^a - k^b|)$ 。因  $j^a \geq 0$  且  $j^b \geq 0$  及  $k^a \geq 0$  且  $k^b \geq 0$ , 存在  $\max(|i^a| + |i^b|, |j^a - j^b|, |k^a - k^b|) < \max(|i^a|, |j^a|, |k^a|) + \max(|i^b|, |j^b|, |k^b|)$ , 显然结论成立; 当  $CB$  位于其他区域, 证明方法与之类似, 这里略去具体证明过程。

## 6 结 论

本文通过构建面向三角网格系统的十二连通距离量测方法体系, 建立一种新型的三角网格三维坐标系统, 解决该坐标系统与传统行列坐标系统的坐标转换方法, 以及三角网格三维坐标系统及行列坐标系统的距离量测方法, 为基于平面三角网格系统的计算和解决全球网格模型的离散距离提供了一种思路。基于三角网格系统的十二连通距离量测方法体系可方便地推广到基于正八面体、正二十面体等柏拉图立体构建的全球离散网格模型的网格距离计算上。目前已取得实质性进展。

## 参考文献:

- [1] LUCZAK E, ROSENFELD A. Distance on a Hexagonal Grid[J]. IEEE Transactions on Computers, 1976, 25(5): 532-533.
- [2] SNYDER W, QI H, SANDER W. A Coordinate System for Hexagonal Pixels[C] // Proceedings of SPIE: The International Society for Optical Engineering. San Diego: SPIE, 1999: 716-727.
- [3] SHERIDAN P, HINTZBT, ALEXANDER D. Pseudo-invariant Image Transformations on a Hexagonal Lattice[J]. Image and Vision Computing, 2000, 18(11): 907-917.
- [4] NAGY B. Finding Shortest Path with Neighbourhood Sequences in Triangular Grids[C] // 2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis. Pula: IEEE, 2001: 55-60.
- [5] NAGY B. Shortest Paths in Triangular Grids with Neighbourhood Sequences[J]. Journal of Computing and Information Technology, 2003, 11(2): 111-122.
- [6] NAGY B. Characterization of Digital Circles in Triangular Grid[J]. Pattern Recognition Letters, 2004, 25(11): 1231-1242.
- [7] NAGY B. Generalised Triangular Grids in Digital Geometry [J]. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyregyhziensis, 2004, 20(1): 63-78.
- [8] NAGY B. Calculating Distance with Neighborhood Sequences in the Hexagonal Grid[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3322: 98-109.
- [9] NAGY B. Distances with Neighbourhood Sequences in Cubic

and Triangular Grids[J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28(1): 99-109.

- [10] HEX J, LI J M, HINZ T. Comparison of Image Conversions between Square Structure and Hexagonal Structure [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2007, 4678: 262-273.
- [11] MEHNERT A, JACKWAY P. On Computing the Exact Euclidean Distance Transform on Rectangular and Hexagonal Grids [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 1999, 11(3): 223-230.
- [12] VINCE A. Indexing the Aperture 3 Hexagonal Discrete Global Grid[J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2006, 17(6): 1227-1236.
- [13] DUTTON G. A Hierarchical Coordinate System for Geoprocessing and Cartography[M]. Berlin: Springer, 1998.
- [14] GOODCHILD M, YANG S R. A Hierarchical Coordinate System for Geoprocessing and Cartography[J]. CVGIP: Graphical Models and Image Processing, 1992, 54(1): 31-44.
- [15] SAHR K, WHITE D, KIMERLING J. Geodesic Discrete Global Grid Systems[J]. Cartography and Geographic Information Science, 2003, 30(2): 121-134.
- [16] SAHR K. Location Coding on Icosahedral Aperture 3 Hexagon Discrete Global Grids[J]. Computers, Environment and Urban Systems, 2008, 32(3): 174-187.
- [17] YUAN Wen. STQIE Model for GeoGrid and the Prototype System[D]. Beijing: Peking University, 2004. (袁文. 地理格网 STQIE 模型及原型系统[D]. 北京: 北京大学, 2004.)
- [18] YUAN Wen, MA Ainai, GUAN Xiaojing. A New Projection for Spherical Triangle: Equal Angle Ratio Projection (EARP) [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2005, 34(1): 78-84. (袁文, 马蔼乃, 管晓静. 一种新的球面三角投影: 等角比投影 (EARP) [J]. 测绘学报, 2005, 34(1): 78-84.)
- [19] YUAN Wen, ZHUANG Dafang, YUAN Wu, et al. A Sphere Triangle Quadtree Model Based on Icosahedron Equal Angle Ratio Projection[J]. Journal of Remote Sensing, 2009, 13(1): 103-111. (袁文, 庄大方, 袁武, 等. 基于等角比例投影的球面三角四叉树剖分模型[J]. 遥感学报, 2009, 13(1): 103-111.)

(责任编辑: 宋启凡)

收稿日期: 2009-11-10

修回日期: 2010-04-09

第一作者简介: 袁文(1974—), 男, 博士, 助理研究员, 研究方向为全球网格模型、空间搜索引擎、三维地形显示。

First author: YUAN Wen(1974—), male, PhD, assistant professor, majors in discrete global grids, geographical information retrieval and 3D terrain visualization.

E-mail: yuanw@lreis.ac.cn